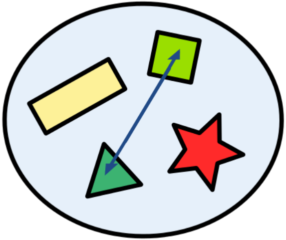
Definiendo la distancia entre los elementos de un conjunto



Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ejemplo 1: $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $\rho(x, y) = |x - y|$.

Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ejemplo 1: $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ejemplo 2: $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, i.e., $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y definimos la función

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$. Esta métrica se suele denominar **métrica euclídea**.

Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ejemplo 1: $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ejemplo 2: $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, i.e., $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y definimos la función

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

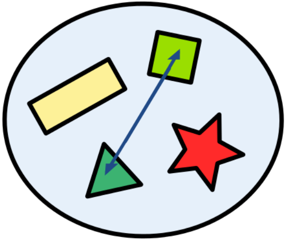
obtenemos un espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$. Esta métrica se suele denominar **métrica euclídea**. **¿Prueba?**

Ejemplos menos conocidos

1. $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, i.e., $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ con la métrica
$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$
2. $\mathbb{R}^n_\infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $\rho(x, y) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|$.
3. $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$ con $\rho(f, g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.
4. $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$ con $\rho(f, g) = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$
5. $\mathbb{X} = l^p$ el espacio de todas las sucesiones numéricas $x = (x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ con la métrica
$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$
6. $\mathbb{X} = l^\infty$ el espacio de todas las sucesiones numéricas $x = (x_n)_n$ acotadas con la métrica $\rho(x, y) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$.

1. Espacio métrico *discreto*. Sea $\mathbb{X}$ un conjunto arbitrario y definamos la métrica *trivial* $\rho(x,y)=1$ si $x\neq y$ y $\rho(x,y)=0$ si $x=y$.
2. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ y definamos la métrica por
$$\rho(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}.$$
3. Sea un espacio métrico $(\mathbb{X},\rho)$ cualquiera. Entonces si definimos sobre $\mathbb{X}$ una nueva métrica $\sigma(x,y)$
$$\sigma(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$
obtenemos un nuevo espacio métrico $(\mathbb{X},\sigma)$.

¿Para qué sirve la métrica?

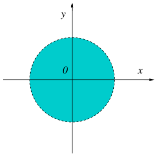


Definición

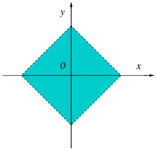
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una "bola" si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\}$.

Definición

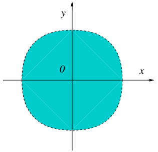
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una “bola” si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\}$.



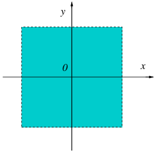
$$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\|x\| = |x| + |y|$$



$$\|x\| = \sqrt[p]{x^p + y^p},\ p > 2$$

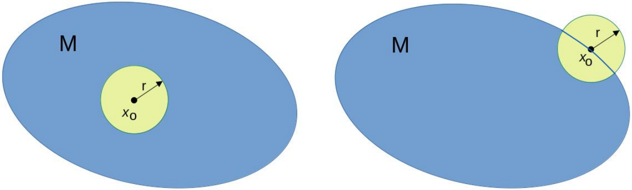


$$\|x\| = \text{máx}(|x|, |y|)$$

¿Quienes son las bolas del espacio métrico trivial?

► $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.

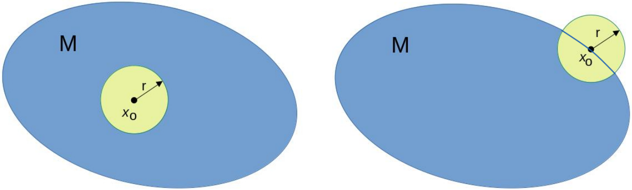
► $x_0 \in \mathbb{X}$ es un punto de la frontera de $M \subset \mathbb{X}$ (no necesariamente $x_0 \in M$) si en cualquier entorno de x_0 hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario $\mathbb{X} \setminus M$ (pudiendo ser, en ambos casos, el propio x_0).



La frontera de M, ∂M, es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

► $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.

► $x_0 \in \mathbb{X}$ es un punto de la frontera de $M \subset \mathbb{X}$ (no necesariamente $x_0 \in M$) si en cualquier entorno de x_0 hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario $\mathbb{X} \setminus M$ (pudiendo ser, en ambos casos, el propio x_0).

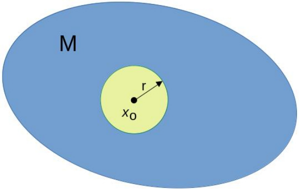


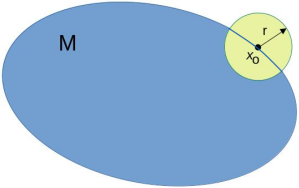
La frontera de M, ∂M, es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

► $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** (adherente) de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$.

▶$x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.

▶$x_0 \in \mathbb{X}$ es un punto de la frontera de $M \subset \mathbb{X}$ (no necesariamente $x_0 \in M$) si en cualquier entorno de x_0 hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario $\mathbb{X} \setminus M$ (pudiendo ser, en ambos casos, el propio x_0).





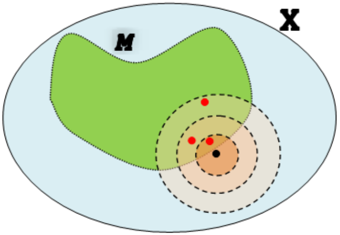
La frontera de M, ∂M, es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

▶$x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** (adherente) de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$. $\Rightarrow$ Si $x \in M$ entonces es de contacto.

Definición

Diremos que x_0 *es un* **punto de límite** *de* $M \subset \mathbb{X}$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *en la bola* $B(x_0, \epsilon)$, *hay al menos un* $x \in M$, $x \neq x_0$

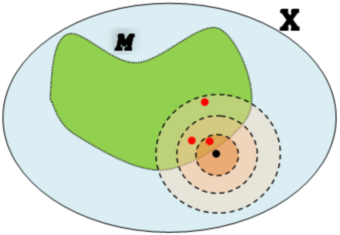
Corolario: $\forall \epsilon > 0$ en cada $B(x, \epsilon)$ hay infinitos elementos de M distintos de x.



Definición

Diremos que x_0 *es un* **punto de límite** *de* $M \subset \mathbb{X}$ *si* $\forall \epsilon > 0$ *en la bola* $B(x_0, \epsilon)$, *hay al menos un* $x \in M$, $x \neq x_0$

Corolario: $\forall \epsilon > 0$ en cada $B(x, \epsilon)$ hay infinitos elementos de M distintos de x.



▶ $M \subset \mathbb{X}$ es abierto si todos sus puntos son interiores. M es cerrado si $\mathbb{X} \setminus M$ es abierto.

Proposición

Sea Σ en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$. Entonces

1. $\emptyset \in \Sigma$, $\mathbb{X} \in \Sigma$,
2. *la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \dots$ son abiertos, $\bigcup_k U_k \in \Sigma$*
3. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \dots, n$ son abiertos, $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \Sigma$.*

Así, el par, $\mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \Sigma)$, Σ colección de subconjuntos de $\mathbb{X}$ se denomina espacio topológico si Σ cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3.

Proposición

Sea Σ en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$. Entonces

1. $\emptyset \in \Sigma$, $\mathbb{X} \in \Sigma$,
2. *la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \dots$ son abiertos, $\bigcup_k U_k \in \Sigma$*
3. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \dots, n$ son abiertos, $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \Sigma$.*

Así, el par, $\mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \Sigma)$, Σ colección de subconjuntos de $\mathbb{X}$ se denomina espacio topológico si Σ cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3.

Proposición

Un conjunto es abierto si y solo si no contiene ningún punto frontera.

Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus punto frontera.

Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

Definición

Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$.

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ t.q. $M \subset B(x_0, r)$.

Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

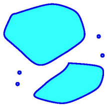
Definición

Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$.

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ t.q. $M \subset B(x_0, r)$.



Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

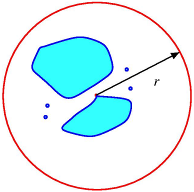
Definición

Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$.

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ t.q. $M \subset B(x_0, r)$.



Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$.

¿Esto qué significa?

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$.

¿Esto qué significa?

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ es separable si contiene un subespacio numerable $M \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.

Ejemplos: ¿Son separables $\mathbb{R}^n$, el espacio métrico trivial, l^2, l^∞?

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$.

¿Esto qué significa?

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ es separable si contiene un subespacio numerable $M \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.

Ejemplos: ¿Son separables $\mathbb{R}^n$, el espacio métrico trivial, l^2, l^∞?

l^2. Elegimos $Q \subset l^2$ el espacio de las sucesiones $y = (q_1, q_2, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\forall k$, $q_k \in \mathbb{Q}$. Q es numerable.

$$\rho(x,q)^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k - \underbrace{q_k}_{=0}|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2,$$

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l^\infty$ una sucesión de 0 y 1.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l^\infty$ una sucesión de 0 y 1.

$$r : y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots .$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo $[0, 1]$ y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como $[0, 1]$ no es numerable, Y tampoco lo es.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l^\infty$ una sucesión de 0 y 1.

$$r : y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots .$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo $[0, 1]$ y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como $[0, 1]$ no es numerable, Y tampoco lo es.

Además $\rho(y, y') = 1$ si $y \neq y'$ y $\rho(y, y') = 0$ si y solo si $y = y'$.

Sean $B(y, 1/3)$ $\forall y \in Y$. Las $B(y, 1/3)$ son disjuntas y forman un conjunto no numerable de bolas.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l^\infty$ una sucesión de 0 y 1.

$$r : y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots .$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo $[0, 1]$ y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como $[0, 1]$ no es numerable, Y tampoco lo es.

Además $\rho(y, y') = 1$ si $y \neq y'$ y $\rho(y, y') = 0$ si y solo si $y = y'$.

Sean $B(y, 1/3)$ $\forall y \in Y$. Las $B(y, 1/3)$ son disjuntas y forman un conjunto no numerable de bolas.

Sea M cualquier conjunto denso en l^∞. Entonces en cada $B(y, 1/3)$ hay al menos un elemento de M, luego M es no numerable y como M es arbitrario $\Rightarrow$ l^∞ **no** es separable.

Si M **no es denso** en $\mathbb{X}$, entonces $\overline{M} \neq \mathbb{X}$, por lo que $\overline{M}$ dejará sin rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$, i.e., en $\mathbb{X}$ hay entornos que no contienen puntos de $\overline{M}$.

Si M **no es denso** en $\mathbb{X}$, entonces $\overline{M} \neq \mathbb{X}$, por lo que $\overline{M}$ dejará sin rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$, i.e., en $\mathbb{X}$ hay entornos que no contienen puntos de $\overline{M}$.

Definición

Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro o denso en ninguna parte si su clausura $\overline{M}$ no contiene ningún entorno, i.e., el interior de $\overline{M} = \emptyset$.

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura $\overline{M}$ no contiene puntos interiores. Ello implica que si M es raro cualquier entorno de $\mathbb{X}$ contiene una bola que es disjunta de con M.

Si M **no es raro**, entonces su $\overline{M}$ tiene puntos interiores.

Si M **no es denso** en $\mathbb{X}$, entonces $\overline{M} \neq \mathbb{X}$, por lo que $\overline{M}$ dejará sin rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$, i.e., en $\mathbb{X}$ hay entornos que no contienen puntos de $\overline{M}$.

Definición

Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro o denso en ninguna parte si su clausura $\overline{M}$ no contiene ningún entorno, i.e., el interior de $\overline{M} = \emptyset$.

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura $\overline{M}$ no contiene puntos interiores. Ello implica que si M es raro cualquier entorno de $\mathbb{X}$ contiene una bola que es disjunta de con M.

Si M **no es raro**, entonces su $\overline{M}$ tiene puntos interiores.

A diferencia de los conjuntos no densos en general, los no raros son tales que su clausura tienen que rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$ pero no necesariamente todo el espacio.

▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.

▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.

▶Sea M un abierto. Entonces $\overline{M} \setminus M$ es raro.

▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.

▶Sea M un abierto. Entonces $\overline{M} \setminus M$ es raro.

Proposición

Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ *es raro si y solo si* $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$ *es denso en* $\mathbb{X}$*, i.e.,* $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$.

▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.

▶Sea M un abierto. Entonces $\overline{M} \setminus M$ es raro.

Proposición

Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro si y solo si $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$ es denso en $\mathbb{X}$, i.e., $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$.

Definición

Un conjunto formado por la unión numerable de conjuntos raros se denomina de primera categoría o magro. Si un conjunto no es de primera categoría, entonces se dice que es de segunda categoría.

▶Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.

▶Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.

▶Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ y elijamos la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Es obvio que los entornos (bolas) de Ω de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto de Ω que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto no vacío de Ω es necesariamente de segunda categoría.

▶Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.

▶Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ y elijamos la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Es obvio que los entornos (bolas) de Ω de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto de Ω que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto no vacío de Ω es necesariamente de segunda categoría.

▶El conjunto vacío $\emptyset$ es denso en ninguna parte, luego es de primera categoría $\Rightarrow$ **un conjunto de segunda categoría tiene que tener elementos**.

Definición

Una aplicación es una regla T que le hace corresponder a cada elemento del subconjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un único elemento del espacio métrico $\mathbb{Y}$. Así, $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = Tx$ o $y = T(x)$, donde $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$. Al conjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ se le denomina dominio de la aplicación.

Definición

Si a cada $x \in \mathcal{D}(T)$ le corresponde un valor $y = Tx \in \mathbb{Y}$ diremos que Tx es la imagen de x según T. Al conjunto de todas las imágenes Tx le denominaremos imagen de T y le denotaremos por $\mathcal{I}(T)$.

Definición

La imagen inversa de $y \in \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$. La imagen inversa de un subconjunto $M \subset \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$ para todos $y \in M$.

La imagen inversa de un elemento $y \in \mathbb{Y}$ puede ser el conjunto vacío, un único punto (elemento) de $\mathcal{D}(T)$ o un subconjunto $M \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición

Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *se llama sobreyectiva si todo elemento* y *de* $\mathbb{Y}$ *es imagen de algún elemento* x *del dominio, es decir* T *es tal que*

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \quad \exists x \in \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx = y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}(T) \equiv \mathbb{Y}.$$

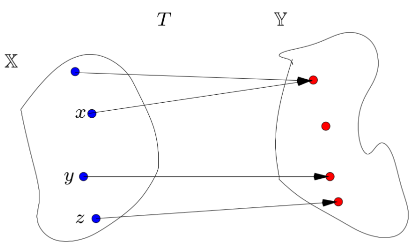
Definición

Una función se llama inyectiva si todo elemento y *de la imagen de* T *es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento* x *del dominio. Es decir* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es tal que*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T), \text{ tales que } y_1 = Tx_1 = y_2 = Tx_2, \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

O, equivalentemente, si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ *con* $x_1 \neq x_2$*, se tiene* $Tx_1 \neq Tx_2$*.*

Es decir una función inyectiva es tal que diferentes puntos tienen diferentes imágenes y por tanto la imagen inversa de cada $y \in \mathcal{I}(T)$ es un único elemento de $\mathcal{D}(T)$.

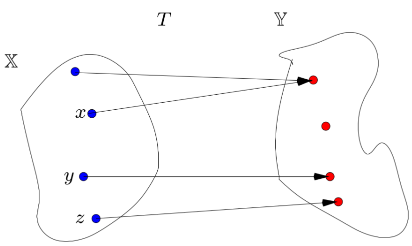


$$T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y} \text{ no es inyectiva y } U : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y} \text{ si lo es.}$$

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

Definición

Sea $U : \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva. Definiremos su inversa* U^{-1} *a la aplicación* $U^{-1} : \mathcal{I}(U) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{X}$ *tal que a cada elemento* $y \in \mathcal{I}(U)$ *le hace corresponder un único* $x \in \mathcal{D}(U)$ *tal que* $Ux = y$.



$$T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y} \text{ no es inyectiva y } U : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y} \text{ si lo es.}$$

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

Definición

Sea $U : \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva. Definiremos su inversa U^{-1} a la aplicación $U^{-1} : \mathcal{I}(U) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{X}$ tal que a cada elemento $y \in \mathcal{I}(U)$ le hace corresponder un único $x \in \mathcal{D}(U)$ tal que $Ux = y$.

Composición de aplicaciones ...

Definición

La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $T|_B$ *que se obtiene de* T *cuando* x *se restringe al conjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$.

La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $C \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *t.q.* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.,* $\widetilde{T}x = Tx \; \forall x \in \mathcal{D}(T)$.

Definición

La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $T|_B$ *que se obtiene de* T *cuando* x *se restringe al conjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$*.*

La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $C \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *t.q.* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.,* $\widetilde{T}x = Tx \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$*.*

Definición

$T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es continua en* $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ t.q. \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \ con \ \rho_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_{\mathbb{Y}}(Tx, Tx_0) < \epsilon$$

T *es continua en todo* $M \subset \mathcal{D}(T)$ *si* T *es continua en todo* $x \in M$*.*

Definición

La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $T|_B$ *que se obtiene de* T *cuando* x *se restringe al conjunto* $B \subset \mathcal{D}(T)$.

La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $C \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *t.q.* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.,* $\widetilde{T}x = Tx \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$.

Definición

$T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es continua en* $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ *si*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ t.q. \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \ con \ \rho_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_{\mathbb{Y}}(Tx, Tx_0) < \epsilon}$$

T *es continua en todo* $M \subset \mathcal{D}(T)$ *si* T *es continua en todo* $x \in M$.

Proposición

Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es continua* $\Leftrightarrow$ *si la imagen inversa de cualquier abierto (cerrado) de* $\mathbb{Y}$ *es un abierto (cerrado) de* $\mathbb{X}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *es convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, si* $\exists x \in \mathbb{X}$ *t.q.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \textit{ t.q. } \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ *es divergente.*

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *es convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *si* $\exists x \in \mathbb{X}$ *t.q.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q.\ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ *es divergente.*

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *es convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, si* $\exists x \in \mathbb{X}$ *t.q.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ *es divergente.*

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Ejercicio: La métrica es una aplicación continua: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *es convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *si* $\exists x \in \mathbb{X}$ *t.q.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \textit{ t.q. } \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ *es divergente.*

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Ejercicio: La métrica es una aplicación continua: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$. Si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$. **Ayuda:** Usa que $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *es convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *si* $\exists x \in \mathbb{X}$ *t.q.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ *es divergente.*

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Ejercicio: La métrica es una aplicación continua: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$. Si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$. **Ayuda:** Usa que $\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$.

Proposición

Sea $M \subset \mathbb{X}$, $M \neq \emptyset$, *y sea* $\overline{M}$ *su clausura. Entonces*

a) $x \in \overline{M}$ *si y sólo si existe una sucesión* $(x_n)_n$ *de elementos de* M *(i.e.,* $\forall n, \ x_n \in M$*) tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b) M *es cerrado si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *implica que* $x \in M$.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite $\Rightarrow x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite $\Rightarrow x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina (secuencialmente) **compacto** *si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite $\Rightarrow x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina (secuencialmente) **compacto** *si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

El recíproco es falso.

Contraejemplo: Sea $\mathbb{X} = l^2$ y sea M el conjunto de los $e_k = \delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Contraejemplo: Sea $\mathbb{X} = l^2$ y sea M el conjunto de los $e_k = \delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Obviamente $\|e_k\| = 1$.

Contraejemplo: Sea $\mathbb{X} = l^2$ y sea M el conjunto de los $e_k = \delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Obviamente $\|e_k\| = 1$.

Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado.

Contraejemplo: Sea $\mathbb{X} = l^2$ y sea M el conjunto de los $e_k = \delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \dots$.

Obviamente $\|e_k\| = 1$.

Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado.

Como M solo tiene puntos aislados, M **no tiene ningún punto de acumulación** $\Rightarrow$ ninguna sucesión que escojamos de elementos *distintos* de M contiene una subsucesión convergente.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$ *se denomina de* **Cauchy o fundamental** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$$

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$ *se denomina de* **Cauchy o fundamental** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\forall n, m > N, \ \rho(x_n, x_m) < \epsilon}$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente es de Cauchy.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ es convergente. ¿Y en general?

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$ *se denomina de* **Cauchy o fundamental** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\forall n, m > N, \ \rho(x_n, x_m) < \epsilon}$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente es de Cauchy.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ es convergente. ¿Y en general?

Definición

Un **espacio métrico** $\mathbb{X}$ *se denomina* **completo** *si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de* $\mathbb{X}$ *converge.*

Teorema

Sea $M \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *completo.* M *es completo si y sólo si es cerrado.*

Ejercicio: Prueba que el espacio métrico l^2 es completo. ¿Es l^p, $p \geq 1$ completo?

Ejercicio: Prueba que el espacio métrico l^2 es completo. ¿Es l^p, $p \geq 1$ completo?

Ejercicio: Prueba que el espacio $C^2_{[a,b]}$, i.e. $C_{[a,b]}$ con la métrica

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

no es completo.

Ejercicio: Prueba que el espacio métrico l^2 es completo. ¿Es l^p, $p \geq 1$ completo?

Ejercicio: Prueba que el espacio $C^2_{[a,b]}$, i.e. $C_{[a,b]}$ con la métrica

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

no es completo.

Ejercicio: Probar que el espacio métrico $C_\infty([a,b])$, i.e. $C_{[a,b]}$ con la métrica

$$\rho(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

es completo.

Definición

Sea sucesión de esferas (bolas cerradas) $(S_n(x_n, r_n))_n$, $S_n(x_n, r_n) \subset \mathbb{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$S_1(x_1, r_1) \supset S_2(x_2, r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n, r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1}, r_{n+1}) \supset \cdots .$$

se denomina sucesión de esferas (cerradas) encajadas.

Teorema (De las esferas encajadas)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

Ejercicio: Prueba que si $\mathbb{X}$ es completo, entonces la $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$, con $r_n \to 0$, contiene un único punto. (**Ayuda:** Usa el teorema anterior).

Nota: En el T. de las esferas encajadas se puede cambiar la condición de que los radios tiendan a cero por que las esferas sean compactas pero . . .

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva del espacio métrico* $(\mathbb{X}, \rho)$ *al espacio métrico* $(\mathbb{Y}, \sigma)$. *Diremos que* T *es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva del espacio métrico* $(\mathbb{X}, \rho)$ *al espacio métrico* $(\mathbb{Y}, \sigma)$*. Diremos que* T *es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Definición

Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ *un espacio métrico y sea* $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ *su clausura. Llamaremos completamiento de* $\mathbb{X}$ *al espacio métrico* $\mathbb{X}^*$ *tal que* $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ *y* $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$*.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es el completamiento de $\mathbb{Q}$.

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva del espacio métrico* $(\mathbb{X}, \rho)$ *al espacio métrico* $(\mathbb{Y}, \sigma)$*. Diremos que* T *es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Definición

Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ *un espacio métrico y sea* $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ *su clausura. Llamaremos completamiento de* $\mathbb{X}$ *al espacio métrico* $\mathbb{X}^*$ *tal que* $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ *y* $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$*.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es el completamiento de $\mathbb{Q}$. ¿Y de $(0, 1)$?

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación inyectiva del espacio métrico* $(\mathbb{X}, \rho)$ *al espacio métrico* $(\mathbb{Y}, \sigma)$*. Diremos que* T *es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Definición

Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ *un espacio métrico y sea* $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ *su clausura. Llamaremos completamiento de* $\mathbb{X}$ *al espacio métrico* $\mathbb{X}^*$ *tal que* $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ *y* $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$*.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es el completamiento de $\mathbb{Q}$. ¿Y de $(0, 1)$?

Teorema

Todo espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ *tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si* $\mathbb{X}^*$ *y* $\mathbb{X}^{**}$ *son dos completamientos de* $\mathbb{X}$*, entonces existe una aplicación* $T : \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$*,* $x^{**} = Tx^*$ *tal que* $Tx = x$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$ *y* $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(Tx^*, Ty^*)$*.*

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. Si existe un* $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y),$$

diremos que T *es una aplicación de contracción.*

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. Si existe un* $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T *es una aplicación de contracción.*

Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. Si existe un* $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y),$$

diremos que T *es una aplicación de contracción.*

Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. El punto* $x \in \mathbb{X}$ *se denomina punto fijo de* T *si* $Tx = x$.

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. Si existe un* $\alpha \in (0,1)$ *tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x,y),$$

diremos que T *es una aplicación de contracción.*

Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

Definición

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación. El punto* $x \in \mathbb{X}$ *se denomina punto fijo de* T *si* $Tx = x$.

Teorema (Del punto fijo)

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico completo y* $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *una aplicación de contracción. Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Theorem (Baire)

Un espacio métrico $\mathbb{X} \neq \emptyset$ completo es de segunda categoría.

Corolario: Sea $\mathbb{X} \neq \emptyset$ un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un M_k contiene un abierto no vacío (un entorno).

Theorem (Baire)

Un espacio métrico $\mathbb{X} \neq \emptyset$ completo es de segunda categoría.

Corolario: Sea $\mathbb{X} \neq \emptyset$ un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un M_k contiene un abierto no vacío (un entorno).

Aplicación: Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Entonces A es un conjunto de primera categoría.

Theorem (Baire)

Un espacio métrico $\mathbb{X} \neq \emptyset$ completo es de segunda categoría.

Corolario: Sea $\mathbb{X} \neq \emptyset$ un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un M_k contiene un abierto no vacío (un entorno).

Aplicación: Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Entonces A es un conjunto de primera categoría.

Ejercicio: Probar que no existen funciones definidas en $[0,1]$ que sean continuas en cada racional de $[0,1]$ y discontinuas en cada irracional de $[0,1]$.