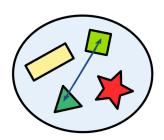
## **Espacios métricos**

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



# Definiendo la distancia entre los elementos de un conjunto



Un espacio métrico es un par  $(\mathbb{X}, \rho)$  donde  $\mathbb{X}$  es un conjunto y  $\rho := \rho(x, y)$  es una función real (univaluada) no negativa definida para todos  $x, y, z \in \mathbb{X}$  tal que

- **3**  $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ .

Un espacio métrico es un par  $(X, \rho)$  donde X es un conjunto y  $\rho := \rho(x, y)$  es una función real (univaluada) no negativa definida para todos  $x, y, z \in X$  tal que

- **3**  $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ .

Ejemplo 1:  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  con  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Un espacio métrico es un par  $(\mathbb{X}, \rho)$  donde  $\mathbb{X}$  es un conjunto y  $\rho := \rho(x, y)$  es una función real (univaluada) no negativa definida para todos  $x, y, z \in \mathbb{X}$  tal que

- **3**  $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ .

Ejemplo 1:  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  con  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Ejemplo 2:  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y definimos la función

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico  $(\mathbb{R}, \rho)$ . Esta métrica se suele denominar métrica euclídea.

3

Un espacio métrico es un par  $(\mathbb{X}, \rho)$  donde  $\mathbb{X}$  es un conjunto y  $\rho := \rho(x, y)$  es una función real (univaluada) no negativa definida para todos  $x, y, z \in \mathbb{X}$  tal que

- **3**  $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ .

Ejemplo 1:  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  con  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Ejemplo 2:  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y definimos la función

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico  $(\mathbb{R}, \rho)$ . Esta métrica se suele denominar métrica euclídea. ¿Prueba?

## Ejemplos menos conocidos

①  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  con la métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \ge 1.$$

- **3**  $\mathbb{X} = C_{[a,b]} \text{ con } \rho(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) g(x)|.$
- **4**  $\mathbb{X} = C_{[a,b]} \text{ con } \rho(f,g) = \left( \int_a^b |f(x) g(x)|^p \right)^{1/p}, \qquad p \ge 1.$
- **5**  $\mathbb{X} = I^p$  el espacio de todas las sucesiones numéricas  $x = (x_n)_n$  tales que  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$  con la métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \ge 1.$$

**⊙**  $\mathbb{X} = I^{\infty}$  el espacio de todas las sucesiones numéricas  $x = (x_n)_n$  acotadas con la métrica  $\rho(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$ .

- **1** Espacio métrico *discreto*. Sea  $\mathbb X$  un conjunto arbitrario y definamos la métrica *trivial*  $\rho(x,y)=1$  si  $x\neq y$  y  $\rho(x,y)=0$  si x=y.
- ② Sea  $\mathbb{X}$  el espacio de todas las sucesiones reales  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  y definamos la métrica por

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

 $\ensuremath{\mathfrak{S}}$  Sea un espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  cualquiera. Entonces si definimos sobre  $\mathbb{X}$  una nueva métrica  $\sigma(x,y)$ 

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)},$$

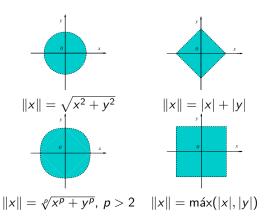
obtenemos un nuevo espacio métrico  $(X, \sigma)$ .

# ¿Para qué sirve la métrica?



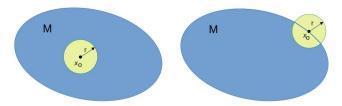
Sea  $\mathbb{X}$  un espacio métrico,  $x_0 \in \mathbb{X}$  y r > 0.  $B(x_0, r)$  es una "bola" si  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X}; \rho(x_0, x) < r\}$ .

Sea  $\mathbb X$  un espacio métrico,  $x_0 \in \mathbb X$  y r > 0.  $B(x_0,r)$  es una "bola" si  $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb X; \ \rho(x_0,x) < r\}$ .



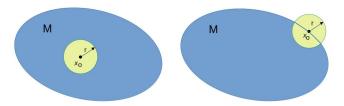
¿Quienes son las bolas del espacio métrico trivial?

- $ightharpoonup x_0 \in \mathbb{X}$  es **punto interior** de  $M \subset \mathbb{X}$  si  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \subset M$ .
- $\triangleright x_0 \in \mathbb{X}$  es un punto de la frontera de  $M \subset \mathbb{X}$  (no necesariamente  $x_0 \in M$ ) si en cualquier entorno de  $x_0$  hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario  $\mathbb{X} \setminus M$  (pudiendo ser, en ambos casos, el propio  $x_0$ ).



La frontera de M,  $\partial M$ , es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

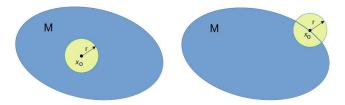
- $ightharpoonup x_0 \in \mathbb{X}$  es **punto interior** de  $M \subset \mathbb{X}$  si  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \subset M$ .
- $\triangleright x_0 \in \mathbb{X}$  es un punto de la frontera de  $M \subset \mathbb{X}$  (no necesariamente  $x_0 \in M$ ) si en cualquier entorno de  $x_0$  hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario  $\mathbb{X} \setminus M$  (pudiendo ser, en ambos casos, el propio  $x_0$ ).



La frontera de M,  $\partial M$ , es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

 $ightharpoonup x_0 \in \mathbb{X}$  es un **punto de contacto** (adherente) de M si  $\forall \epsilon > 0$  en la bola  $B(x, \epsilon)$ , hay al menos un  $x \in M$ .

- $ightharpoonup x_0 \in \mathbb{X}$  es **punto interior** de  $M \subset \mathbb{X}$  si  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \subset M$ .
- $\triangleright x_0 \in \mathbb{X}$  es un punto de la frontera de  $M \subset \mathbb{X}$  (no necesariamente  $x_0 \in M$ ) si en cualquier entorno de  $x_0$  hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario  $\mathbb{X} \setminus M$  (pudiendo ser, en ambos casos, el propio  $x_0$ ).



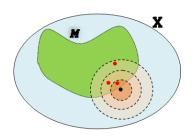
La frontera de M,  $\partial M$ , es el conjunto de todos los puntos frontera de M.

 $ightharpoonup x_0 \in \mathbb{X}$  es un **punto de contacto** (adherente) de M si  $\forall \epsilon > 0$  en la bola  $B(x,\epsilon)$ , hay al menos un  $x \in M$ .  $\Rightarrow$  Si  $x \in M$  entonces es de contacto.

#### Definición,

Diremos que  $x_0$  es un punto de límite de  $M \subset \mathbb{X}$  si  $\forall \epsilon > 0$  en la bola  $B(x_0, \epsilon)$ , hay al menos un  $x \in M$ ,  $x \neq x_0$ 

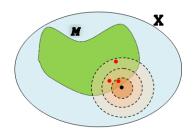
**Corolario:**  $\forall \epsilon > 0$  en cada  $B(x, \epsilon)$  hay infinitos elementos de M distintos de x.



#### Definición

Diremos que  $x_0$  es un punto de límite de  $M \subset \mathbb{X}$  si  $\forall \epsilon > 0$  en la bola  $B(x_0, \epsilon)$ , hay al menos un  $x \in M$ ,  $x \neq x_0$ 

**Corolario:**  $\forall \epsilon > 0$  en cada  $B(x, \epsilon)$  hay infinitos elementos de M distintos de x.



 $ightharpoonup M\subset \mathbb{X}$  es abierto si todos sus puntos son interiores. M es cerrado si  $\mathbb{X}\setminus M$  es abierto.

Sea  $\Sigma$  en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de  $\mathbb X$ . Entonces

- 2 la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de  $\mathbb X$  es abierto: Si  $U_k$ ,  $k=1,2,\ldots$  son abiertos,  $\bigcup_k U_k \in \Sigma$
- **3** La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si  $U_k$ ,  $k=1,2,\ldots,n$  son abiertos,  $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \Sigma$ .

Así, el par,  $\mathbb{X}$ ,  $(\mathbb{X}, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  colección de subconjuntos de  $\mathbb{X}$  se denomina espacio topológico si  $\Sigma$  cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3.

Sea  $\Sigma$  en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de  $\mathbb X$ . Entonces

- 2 la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de  $\mathbb X$  es abierto: Si  $U_k$ ,  $k=1,2,\ldots$  son abiertos,  $\bigcup_k U_k \in \Sigma$
- **3** La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si  $U_k$ , k = 1, 2, ..., n son abiertos,  $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \Sigma$ .

Así, el par,  $\mathbb{X}$ ,  $(\mathbb{X}, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  colección de subconjuntos de  $\mathbb{X}$  se denomina espacio topológico si  $\Sigma$  cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3.

## Proposición

Un conjunto es abierto si y solo si no contiene ningún punto frontera.

## Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus punto frontera.

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

#### Definición

Dado un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$ , se denomina clausura de M al conjunto  $\overline{M}$  de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además  $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}.$ 

## Definición

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un  $x_0 \in \mathbb{X} \exists r > 0$  t.q.  $M \subset B(x_0, r)$ .

Espacios métricos: Topología

## Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

#### Definición

Dado un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$ , se denomina clausura de M al conjunto  $\overline{M}$  de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además  $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}.$ 

## Definición

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un  $x_0 \in \mathbb{X} \ \exists r > 0$  t.q.  $M \subset B(x_0, r)$ .



Espacios métricos: Topología

## Proposición

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.

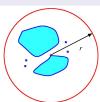
#### Definición

Dado un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$ , se denomina clausura de M al conjunto  $\overline{M}$  de los elementos de M y sus puntos de contacto.

Además  $\overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}.$ 

## Definición

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un  $x_0 \in \mathbb{X} \exists r > 0$  t.q.  $M \subset B(x_0, r)$ .



Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es denso en  $\mathbb{X}$  si su clausura  $\overline{M} = \mathbb{X}$ .

¿Esto qué significa?

## Espacios métricos separables

#### Definición

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es denso en  $\mathbb{X}$  si su clausura  $\overline{M} = \mathbb{X}$ .

¿Esto qué significa?

#### Definición

Un espacio métrico  $\mathbb X$  es separable si contiene un subespacio numerable  $M\subset \mathbb X$  denso en  $\mathbb X$ .

Ejemplos: ¿Son separables  $\mathbb{R}^n$ , el espacio métrico trivial,  $I^2$ ,  $I^{\infty}$ ?

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es denso en  $\mathbb{X}$  si su clausura  $\overline{M} = \mathbb{X}$ .

¿Esto qué significa?

#### Definición

Un espacio métrico  $\mathbb X$  es separable si contiene un subespacio numerable  $M\subset \mathbb X$  denso en  $\mathbb X$ .

Ejemplos: ¿Son separables  $\mathbb{R}^n$ , el espacio métrico trivial,  $I^2$ ,  $I^{\infty}$ ?

 $I^2$ . Elegimos  $Q \subset I^2$  el espacio de las sucesiones  $y = (q_1, q_2, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $y \ \forall k, \ q_k \in \mathbb{Q}$ . Q es numerable.

$$\rho(x,q)^{2} = \sum_{k=1}^{n} |x_{k} - q_{k}|^{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_{k} - \underbrace{q_{k}}_{=0}|^{2} < \frac{\epsilon^{2}}{2} + \frac{\epsilon^{2}}{2} = \epsilon^{2},$$

R. Álvarez-Nodarse Espacios métricos U. Sevilla

12

$$r: y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo [0,1] y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como [0,1] no es numerable, Y tampoco lo es.

$$r: y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo [0,1] y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como [0,1] no es numerable, Y tampoco lo es.

Además  $\rho(y, y') = 1$  si  $y \neq y'$  y  $\rho(y, y') = 0$  si y solo si y = y'.

Sean  $B(y,1/3) \ \forall y \in Y$ . Las B(y,1/3) son disjuntas y forman un conjunto no numerable de bolas.

$$r: y \mapsto \mathbb{R}, \quad r(y) = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots$$

r establece una relación biunívoca entre los números reales del intervalo [0,1] y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como [0,1] no es numerable, Y tampoco lo es.

Además  $\rho(y, y') = 1$  si  $y \neq y'$  y  $\rho(y, y') = 0$  si y solo si y = y'.

Sean  $B(y,1/3) \ \forall y \in Y$ . Las B(y,1/3) son disjuntas y forman un conjunto no numerable de bolas.

Sea M cualquier conjunto denso en  $I^{\infty}$ . Entonces en cada B(y,1/3) hay al menos un elemento de M, luego M es no numerable y como M es arbitrario  $\Rightarrow I^{\infty}$  no es separable.

## Espacios métricos: conjuntos raros

Si M no es denso en  $\mathbb{X}$ , entonces  $\overline{M} \neq \mathbb{X}$ , por lo que  $\overline{M}$  dejará sin rellenar algún entorno de  $\mathbb{X}$ , i.e., en  $\mathbb{X}$  hay entornos que no contienen puntos de  $\overline{M}$ .

Si M no es denso en  $\mathbb{X}$ , entonces  $\overline{M} \neq \mathbb{X}$ , por lo que  $\overline{M}$  dejará sin rellenar algún entorno de  $\mathbb{X}$ , i.e., en  $\mathbb{X}$  hay entornos que no contienen puntos de  $\overline{M}$ .

#### Definición

Un conjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es raro o denso en ninguna parte si su clausura  $\overline{M}$  no contiene ningún entorno, i.e., el interior de  $\overline{M} = \emptyset$ .

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura  $\overline{M}$  no contiene puntos interiores. Ello implica que si M es raro cualquier entorno de  $\mathbb X$  contiene una bola que es disjunta de con M.

Si M no es raro, entonces su  $\overline{M}$  tiene puntos interiores.

Si M no es denso en  $\mathbb{X}$ , entonces  $\overline{M} \neq \mathbb{X}$ , por lo que  $\overline{M}$  dejará sin rellenar algún entorno de  $\mathbb{X}$ , i.e., en  $\mathbb{X}$  hay entornos que no contienen puntos de  $\overline{M}$ .

#### Definición

Un conjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es raro o denso en ninguna parte si su clausura  $\overline{M}$  no contiene ningún entorno, i.e., el interior de  $\overline{M} = \emptyset$ .

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura  $\overline{M}$  no contiene puntos interiores. Ello implica que si M es raro cualquier entorno de  $\mathbb X$  contiene una bola que es disjunta de con M.

Si M no es raro, entonces su  $\overline{M}$  tiene puntos interiores.

A diferencia de los conjuntos no densos en general, los no raros son tales que su clausura tienen que rellenar algún entorno de  $\mathbb X$  pero no necesariamente todo el espacio.

## Espacios métricos: conjuntos raros

►Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.

- ►Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.
- ▶Sea M un abierto. Entonces  $\overline{M} \setminus M$  es raro.

- ▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.
- ►Sea M un abierto. Entonces  $\overline{M} \setminus M$  es raro.

*Un conjunto M*  $\subset \mathbb{X}$  *es raro si y solo si*  $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$  *es denso en*  $\mathbb{X}$ , *i.e.*,  $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$ .

- ▶Si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte.
- ►Sea M un abierto. Entonces  $\overline{M} \setminus M$  es raro.

Un conjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es raro si y solo si  $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$  es denso en  $\mathbb{X}$ , i.e.,  $\mathbb{X} \setminus \overline{M} = \mathbb{X}$ .

## Definición

Un conjunto formado por la unión numerable de conjuntos raros se denomina de primera categoría o magro. Si un conjunto no es de primera categoría, entonces se dice que es de segunda categoría.

## Espacios métricos: ejemplos de conjuntos raros

 $ightharpoonup Sea \ \mathbb{X} = \mathbb{R}$  con la métrica habitual de  $\mathbb{R}$ . Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.

- $ightharpoonup Sea \ \mathbb{X} = \mathbb{R}$  con la métrica habitual de  $\mathbb{R}$ . Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.
- Sea  $\Omega=\{1,2,3,\dots\}$  y elijamos la métrica habitual de  $\mathbb{R}$ . Es obvio que los entornos (bolas) de  $\Omega$  de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto de  $\Omega$  que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto no vacío de  $\Omega$  es necesariamente de segunda categoría.

- $ightharpoonup Sea \ \mathbb{X} = \mathbb{R}$  con la métrica habitual de  $\mathbb{R}$ . Entonces cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es de primera categoría, el conjunto de los números naturales es de primera categoría.
- Sea  $\Omega=\{1,2,3,\dots\}$  y elijamos la métrica habitual de  $\mathbb{R}$ . Es obvio que los entornos (bolas) de  $\Omega$  de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto de  $\Omega$  que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto no vacío de  $\Omega$  es necesariamente de segunda categoría.
- ►El conjunto vacío  $\emptyset$  es denso en ninguna parte, luego es de primera categoría  $\Rightarrow$  un conjunto de segunda categoría tiene que tener elementos.

Espacios métricos: Aplicaciones (Operadores)

## Definición

Una aplicación es una regla T que le hace corresponder a cada elemento del subconjunto  $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$  un único elemento del espacio métrico  $\mathbb{Y}$ . Así,  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ , y = Tx o y = T(x), donde  $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$  e  $y \in \mathbb{Y}$ . Al conjunto  $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$  se le denomina dominio de la aplicación.

#### Definición

Si a cada  $x \in \mathcal{D}(T)$  le corresponde un valor  $y = Tx \in \mathbb{Y}$  diremos que Tx es la imagen de x según T. Al conjunto de todas las imágenes Tx le denominaremos imagen de T y le denotaremos por  $\mathcal{I}(T)$ .

#### Definición

La imagen inversa de  $y \in \mathbb{Y}$  es el conjunto de todas las  $x \in \mathcal{D}(T)$  tales que Tx = y. La imagen inversa de un subconjunto  $M \subset \mathbb{Y}$  es el conjunto de todas las  $x \in \mathcal{D}(T)$  tales que Tx = y para todos  $y \in M$ .

La imagen inversa de un elemento  $y \in \mathbb{Y}$  puede ser el conjunto vacío, un único punto (elemento) de  $\mathcal{D}(T)$  o un subconjunto  $M \subset \mathcal{D}(T)$ .

Una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  se llama sobreyectiva si todo elemento y de  $\mathbb{Y}$  es imagen de algún elemento x del dominio, es decir T es tal que

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \quad \exists x \in \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx = y \iff \mathcal{I}(T) \equiv \mathbb{Y}.$$

#### Definición

Una función se llama inyectiva si todo elemento y de la imagen de T es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento x del dominio. Es decir T:  $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  es tal que

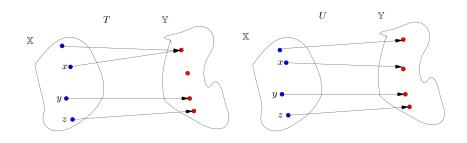
$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T)$$
, tales que  $y_1 = Tx_1 = y_2 = Tx_2$ ,  $\Rightarrow x_1 = x_2$ .

O, equivalentemente, si 
$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$$
 con  $x_1 \neq x_2$ , se tiene  $Tx_1 \neq Tx_2$ .

Es decir una función inyectiva es tal que diferentes puntos tienen diferentes imágenes y por tanto la imagen inversa de cada  $y \in \mathcal{I}(T)$  es un único elemento de  $\mathcal{D}(T)$ .

R. Álvarez-Nodarse Espacios métricos U. Sevilla

18



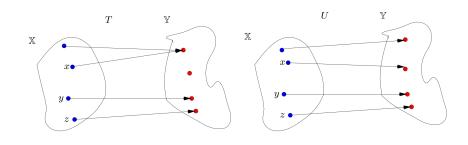
 $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  no es inyectiva y  $U: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  si lo es.

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

### Definición

Sea  $U:\mathcal{D}(U)\subset\mathbb{X}\mapsto\mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva. Definiremos su inversa  $U^{-1}$  a la aplicación  $U^{-1}:\mathcal{I}(U)\subset\mathbb{Y}\mapsto\mathcal{D}(U)\subset\mathbb{X}$  tal que a cada elemento  $y\in\mathcal{I}(U)$  le hace corresponder un único  $x\in\mathcal{D}(U)$  tal que Ux=y.

# Espacios métricos: Aplicaciones (Operadores)



 $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  no es inyectiva y  $U: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  si lo es.

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

### Definición

Sea  $U:\mathcal{D}(U)\subset\mathbb{X}\mapsto\mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva. Definiremos su inversa  $U^{-1}$  a la aplicación  $U^{-1}:\mathcal{I}(U)\subset\mathbb{Y}\mapsto\mathcal{D}(U)\subset\mathbb{X}$  tal que a cada elemento  $y\in\mathcal{I}(U)$  le hace corresponder un único  $x\in\mathcal{D}(U)$  tal que Ux=y.

Composición de aplicaciones ...

La restricción de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $T|_B$  que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$ .

La extensión de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $C \supset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $\widetilde{T}$  t.q.  $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$ , i.e.,  $\widetilde{T}x = Tx \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ .

La restricción de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $T|_B$  que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$ .

La extensión de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $C \supset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $\widetilde{T}$  t.q.  $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$ , i.e.,  $\widetilde{T}x = Tx \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ .

#### Definición

 $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\mapsto\mathbb{Y}$  es continua en  $x_0\in\mathcal{D}(T)$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in \mathcal{D}(T) \text{ con } \rho_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_{\mathbb{Y}}(Tx, Tx_0) < \epsilon$$

T es continua en todo  $M \subset \mathcal{D}(T)$  si T es continua en todo  $x \in M$ .

Espacios métricos: Aplicaciones (Operadores)

## Definición

La restricción de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $T|_B$  que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto  $B \subset \mathcal{D}(T)$ .

La extensión de una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  a un subconjunto  $C \supset \mathcal{D}(T)$  es la aplicación  $\widetilde{T}$  t.q.  $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$ , i.e.,  $\widetilde{T}x = Tx \ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ .

#### Definición

 $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  es continua en  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ t.q. \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \ con \ \rho_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_{\mathbb{Y}}(Tx, Tx_0) < \epsilon$$

T es continua en todo  $M \subset \mathcal{D}(T)$  si T es continua en todo  $x \in M$ .

## Proposición

Una aplicación  $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  es continua  $\Leftrightarrow$  si la imagen inversa de cualquier abierto (cerrado) de  $\mathbb{Y}$  es un abierto (cerrado) de  $\mathbb{X}$ .

Una sucesión  $(x_n)_n \in \mathbb{X}$  es convergente,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , si  $\exists x \in \mathbb{X}$  t.q.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que  $(x_n)_n$  es divergente.

Una sucesión  $(x_n)_n \in \mathbb{X}$  es convergente,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , si  $\exists x \in \mathbb{X}$  t.q.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que  $(x_n)_n$  es divergente.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Una sucesión  $(x_n)_n \in \mathbb{X}$  es convergente,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , si  $\exists x \in \mathbb{X}$  t.q.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que  $(x_n)_n$  es divergente.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

**Ejercicio:** La métrica es una aplicación continua: Es decir, si  $x_n \to x$  entonces  $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$ .

R. Álvarez-Nodarse Espacios métricos U. Sevilla

21

Una sucesión  $(x_n)_n \in \mathbb{X}$  es convergente,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , si  $\exists x \in \mathbb{X}$  t.q.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que  $(x_n)_n$  es divergente.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

**Ejercicio:** La métrica es una aplicación continua: Es decir, si  $x_n \to x$  entonces  $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$ . Si  $x_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} x$  e  $y_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} y \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$ . **Ayuda:** Usa que  $\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$ .

R. Álvarez-Nodarse Espacios métricos U. Sevilla

21

Una sucesión  $(x_n)_n \in \mathbb{X}$  es convergente,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , si  $\exists x \in \mathbb{X}$  t.q.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \quad \rho(x, x_n) < \epsilon.$$

En caso contrario diremos que  $(x_n)_n$  es divergente.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

**Ejercicio:** La métrica es una aplicación continua: Es decir, si  $x_n \to x$  entonces  $\rho(x_n,a) \to \rho(x,a)$ . Si  $x_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} x$  e  $y_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} y \Rightarrow \text{lím}_{n \to \infty} \rho(x_n,y_n) = \rho(x,y)$ . **Ayuda:** Usa que  $\rho(x_n,y_n) \le \rho(x_n,x) + \rho(x,y) + \rho(y,y_n)$ .

## Proposición

Sea  $M \subset \mathbb{X}$ ,  $M \neq \emptyset$ , y sea  $\overline{M}$  su clausura. Entonces

- a)  $x \in \overline{M}$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de M (i.e.,  $\forall n, x_n \in M$ ) tal que  $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ .
- b) M es cerrado si y sólo si  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$  implica que  $x \in M$ .

# Espacios métricos: Compacidad

▶Un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$  es cerrado si y sólo si  $M = \overline{M}$ . Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite  $\Rightarrow x \in \overline{M}$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de M tal que lím $_{n\to\infty}x_n=x$ .

▶Un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$  es cerrado si y sólo si M = M. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite  $\Rightarrow x \in \overline{M}$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de M tal que lím $_{n\to\infty} x_n = x$ .

### Definición

Un espacio métrico  $\mathbb{X}$  se denomina (secuencialmente) **compacto** si cualquier sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de  $\mathbb{X}$  tiene una subsucesión convergente.

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es compacto si M es compacto por si mismo, i.e.,  $\forall (x_n)_n$  de M tiene una subsucesión convergente en M.

▶Un subconjunto  $M \in \mathbb{X}$  es cerrado si y sólo si  $M = \overline{M}$ . Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite  $\Rightarrow x \in \overline{M}$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de M tal que lím $_{n\to\infty} x_n = x$ .

### Definición

Un espacio métrico  $\mathbb{X}$  se denomina (secuencialmente) **compacto** si cualquier sucesión  $(x_n)_n$  de elementos de  $\mathbb{X}$  tiene una subsucesión convergente.

Un subconjunto  $M \subset \mathbb{X}$  es compacto si M es compacto por si mismo, i.e.,  $\forall (x_n)_n$  de M tiene una subsucesión convergente en M.

#### Lema

Si  $M \subset \mathbb{X}$  es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

El recíproco es falso.

**Contraejemplo:** Sea  $\mathbb{X}=l^2$  y sea M el conjunto de los  $e_k=\delta_{k,i},\ k=1,2,\ldots$ 

**Contraejemplo:** Sea  $\mathbb{X} = l^2$  y sea M el conjunto de los  $e_k = \delta_{k,i}$ ,  $k = 1, 2, \ldots$ 

Obviamente  $||e_k|| = 1$ .

**Contraejemplo:** Sea  $\mathbb{X} = I^2$  y sea M el conjunto de los  $e_k = \delta_{k,i}$ ,  $k = 1, 2, \ldots$ 

Obviamente  $||e_k|| = 1$ .

Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado.

**Contraejemplo:** Sea  $\mathbb{X} = I^2$  y sea M el conjunto de los  $e_k = \delta_{k,i}$ ,  $k = 1, 2, \ldots$ 

Obviamente  $||e_k|| = 1$ .

Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado.

Como M solo tiene puntos aislados, M no tiene ningún punto de acumulación  $\Rightarrow$  ninguna sucesión que escojamos de elementos distintos de M contiene una subsucesión convergente.

Una sucesión  $(x_n)_n$  de  $\mathbb{X}$  se denomina de Cauchy o fundamental si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$$

Una sucesión  $(x_n)_n$  de  $\mathbb X$  se denomina de Cauchy o fundamental si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad$$

$$\forall n, m > N, \ \rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente es de Cauchy.

Una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  es de Cauchy  $\Leftrightarrow$  es convergente. ¿Y en general?

Una sucesión  $(x_n)_n$  de  $\mathbb X$  se denomina de Cauchy o fundamental si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad$$

$$\forall n, m > N, \ \rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

**Ejercicio:** Prueba que una sucesión convergente es de Cauchy.

Una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  es de Cauchy  $\Leftrightarrow$  es convergente. ¿Y en general?

#### Definición

Un espacio métrico  $\mathbb X$  se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de  $\mathbb X$  converge.

#### Teorema

Sea  $M \subset X$ , X completo. M es completo si y sólo si es cerrado.

**Ejercicio:** Prueba que el espacio métrico  $l^2$  es completo. ¿Es  $l^p$ ,  $p \ge 1$  completo?

**Ejercicio:** Prueba que el espacio métrico  $I^2$  es completo. ¿Es  $I^p$ ,  $p \ge 1$  completo?

**Ejercicio:** Prueba que el espacio  $C_{[a,b]}^2$ , i.e.  $C_{[a,b]}$  con la métrica

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

no es completo.

**Ejercicio:** Prueba que el espacio métrico  $l^2$  es completo. ¿Es  $l^p$ ,  $p \ge 1$  completo?

**Ejercicio:** Prueba que el espacio  $C_{[a,b]}^2$ , i.e.  $C_{[a,b]}$  con la métrica

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

no es completo.

**Ejercicio:** Probar que el espacio métrico  $C_{\infty}([a,b])$ , i.e.  $C_{[a,b]}$  con la métrica

$$\rho(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

es completo.

Sea sucesión de esferas (bolas cerradas)  $(S_n(x_n, r_n))_n$ ,  $S_n(x_n, r_n) \subset \mathbb{X}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tales que

$$S_1(x_1, r_1) \supset S_2(x_2, r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n, r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1}, r_{n+1}) \supset \cdots$$

se denomina sucesión de esferas (cerradas) encajadas.

## Teorema (De las esferas encajadas)

Sea X un espacio métrico. X es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero  $(r_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0)$  tiene intersección no vacía, i.e.,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$ .

**Ejercicio:** Prueba que si  $\mathbb{X}$  es completo, entonces la  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$ , con  $r_n \to 0$ , contiene un único punto. (**Ayuda:** Usa el teorema anterior).

Nota: En el T. de las esferas encajadas se puede cambiar la condición de que los radios tiendan a cero por que las esferas sean compactas pero . . .

R. Álvarez-Nodarse

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva del espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  al espacio métrico  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ . Diremos que T es una isometría si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva del espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  al espacio métrico  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ . Diremos que T es una isometría si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

## Definición

Sea  $(\mathbb{X}, \rho)$  un espacio métrico y sea  $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$  su clausura. Llamaremos completamiento de  $\mathbb{X}$  al espacio métrico  $\mathbb{X}^*$  tal que  $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$  y  $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{R}$  es el completamiento de  $\mathbb{Q}$ .

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva del espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  al espacio métrico  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ . Diremos que T es una isometría si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

### Definición

Sea  $(\mathbb{X}, \rho)$  un espacio métrico y sea  $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$  su clausura. Llamaremos completamiento de  $\mathbb{X}$  al espacio métrico  $\mathbb{X}^*$  tal que  $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$  y  $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{R}$  es el completamiento de  $\mathbb{Q}$ . ¿Y de (0,1)?

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$  una aplicación inyectiva del espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  al espacio métrico  $(\mathbb{Y}, \sigma)$ . Diremos que T es una isometría si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

### Definición

Sea  $(\mathbb{X}, \rho)$  un espacio métrico y sea  $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$  su clausura. Llamaremos completamiento de  $\mathbb{X}$  al espacio métrico  $\mathbb{X}^*$  tal que  $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$  y  $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{R}$  es el completamiento de  $\mathbb{Q}$ . ¿Y de (0,1)?

#### **Teorema**

Todo espacio métrico  $(\mathbb{X}, \rho)$  tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si  $\mathbb{X}^*$  y  $\mathbb{X}^{**}$  son dos completamientos de  $\mathbb{X}$ , entonces existe una aplicación  $T: \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$ ,  $x^{**} = Tx^*$  tal que Tx = x para todo  $x \in \mathbb{X}$  y  $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(Tx^*, Ty^*)$ .

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. Si existe un  $\alpha \in (0,1)$  tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. Si existe un  $\alpha \in (0,1)$  tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

## Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. Si existe un  $\alpha \in (0,1)$  tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

## Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

## Definición

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. El punto  $x \in \mathbb{X}$  se denomina punto fijo de T si Tx = x.

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. Si existe un  $\alpha \in (0,1)$  tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

## Ejercicio

Prueba que toda aplicación de contracción es continua.

## Definición

Sea  $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$  una aplicación. El punto  $x \in \mathbb{X}$  se denomina punto fijo de T si Tx = x.

## Teorema (Del punto fijo)

Sea  $\mathbb X$  un espacio métrico completo y  $T: \mathbb X \mapsto \mathbb X$  una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.

Un espacio métrico  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  completo es de segunda categoría.

**Corolario:** Sea  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un  $M_k$  contiene un abierto no vacío (un entorno).

Un espacio métrico  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  completo es de segunda categoría.

**Corolario:** Sea  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un  $M_k$  contiene un abierto no vacío (un entorno).

Pero si: 
$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \implies \mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{M_k}, \Longrightarrow \overline{M_k}$$
 contiene un abierto

Un espacio métrico  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  completo es de segunda categoría.

**Corolario:** Sea  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un  $M_k$  contiene un abierto no vacío (un entorno).

Pero si: 
$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \implies \mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{M_k}, \Longrightarrow \overline{M_k}$$
 contiene un abierto

**Aplicación:** Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Entonces A es un conjunto de primera categoría.

Un espacio métrico  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  completo es de segunda categoría.

**Corolario:** Sea  $\mathbb{X} \neq \emptyset$  un espacio métrico completo. Supongamos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados.}$$

Entonces al menos un  $M_k$  contiene un abierto no vacío (un entorno).

Pero si: 
$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \implies \mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{M_k}, \Longrightarrow \overline{M_k}$$
 contiene un abierto

**Aplicación:** Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Entonces A es un conjunto de primera categoría.

**Ejercicio:** Probar que no existen funciones definidas en [0,1] que sean continuas en los racionales y discontinuas en los irracionales.

29