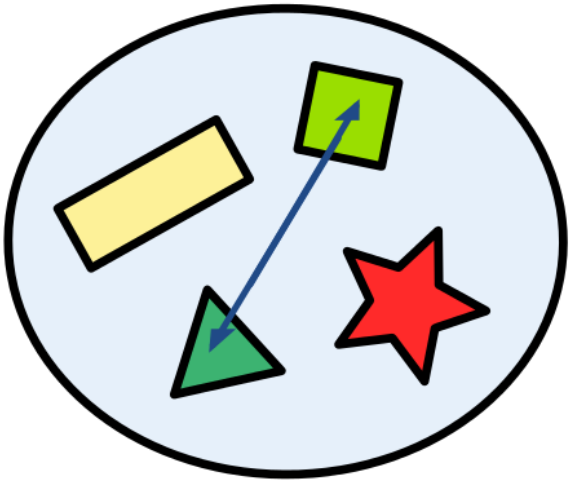
Introducción al Análisis Funcional

Prof. Renato Álvarez Nodarse

WWW: `https://renato.ryn-fismat.es`



$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Versión del 25/04/2024

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Sucesiones numéricas en $\mathbb{C}$ 1

1.2. Series 5

1.3. Continuidad uniforme 22

1.4. Sobre conjuntos infinitos 45

2. ¿Qué es el análisis funcional? **53**

2.1. Una ecuación diferencial lineal 53

2.2. La ecuación integral de Volterra 56

3. Espacios métricos **63**

3.1. Definición de espacio métrico 63

3.2. Algunas definiciones topológicas 68

3.3. Aplicaciones en espacios métricos 74

3.4. Espacios métricos separables 78

3.5. Convergencia en espacios métricos 82

3.6. El teorema de las categorías de Baire 97

3.7. Problemas 103

4. Espacios normados y espacios de Banach **119**
4.1. Espacios vectoriales 119
4.2. Espacios normados y de Banach 124
4.3. Espacios normados de dimensión finita 128
4.4. Aplicaciones lineales 133
4.5. El teorema de Banach-Steinhaus 141
4.6. Problemas 148

5. Espacios de Hilbert **159**
5.1. Espacios euclídeos y espacios de Hilbert 159
5.2. Espacios de Hilbert separables 168
5.3. Problemas 181

6. Operadores en espacios de Hilbert **189**
6.1. Definiciones 189
6.2. Operadores autoadjuntos 195
6.3. Inverso de un operador 201
6.4. Operadores compactos 207
6.5. Teorema Espectral 212
6.6. Problemas 225

Bibliografía **241**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos del análisis necesarios para entender el resto de los capítulos del estas notas. Asumiremos que el lector tiene unos conocimientos mínimos del cálculo infinitesimal, el álgebra lineal y los números complejos. Para más detalles consultar, por ejemplo, [12, 13].

1.1. Sucesiones numéricas en $\mathbb{C}$

Definición 1.1.1 *La aplicación o función $f : \mathbb{N} \mapsto A$ que hace corresponder a cada número natural n un elemento a_n de cierto conjunto A se denomina sucesión de elementos de A y la denotaremos por $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, o $(a_n)_n$.*

Por ejemplo, si $A = \mathbb{C}$, diremos que $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$ define una sucesión de números complejos. Como ejemplo tenemos

$$x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}, \quad z_n = e^{in} = \{e^i, e^{2i}, e^{3i}, \dots\}, \quad \dots$$

Definición 1.1.2 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ está acotada, si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$.*

Por ejemplo, las sucesiones (x_n) y $(z_n)_n$ definidas antes son claramente acotadas (basta escoger $M = 1$).

Definición 1.1.3 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ es no acotada si $\forall M \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada.

Definiremos la distancia $d(z_1, z_2)$ entre dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.1.1}$$

Definiremos el ϵ-entorno o ϵ-vecindad de un número complejo z_0 a la "bola" $U_\epsilon(z_0)$ definida por

$$U_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Obviamente $U_\epsilon(z_0)$ es un círculo del plano complejo de centro z_0 y radio ϵ excluyendo la frontera (o sea, la correspondiente circunferencia).

Sea $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que

$$\text{máx}\{|x-x_0|, |y-y_0|\} \leq |z-z_0| \leq |x-x_0|+|y-y_0|, \qquad |z+z_0| \leq |z|+|z_0|,$$

podemos construir la teoría de límites en $\mathbb{C}$ de la misma forma que se hace en $\mathbb{R}$. Así pues, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.4 *Diremos una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ tiene límite z, y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, si*[1]

$$\forall \epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N, \quad |z_n - z| < \epsilon.$$

El significado geométrico del límite es claro: dentro de ϵ-entorno $U_\epsilon(z)$ del límite z de la sucesión $(z_n)_n$ hay infinitos términos de la sucesión (de hecho todos a partir de cierto N) y fuera de él sólo hay un número finito de términos (a lo sumo los N primeros términos) de la misma.

Si escribimos $z_n = x_n + iy_n$ y $z = x + iy$, entonces, de las desigualdades

$$\text{máx}\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

En particular, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si y sólo si $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

[1] En adelante al escribir $a > 0$ asumiremos que a es un número real, ya que los complejos no se pueden ordenar.

Nota 1.1.5 *De lo anterior se deduce que toda sucesión de números complejos es equivalente a dos sucesiones de números reales (la de sus partes reales e imaginarias).*

Así pues, por analogía con el caso real podemos definir las sucesiones de Cauchy, enunciar y probar el criterio de Cauchy y muchas otras propiedades de las las sucesiones[2]. No obstante al ser $\mathbb{C}$ un cuerpo **no** ordenado, se pierden todas las propiedades relacionadas con el orden (supremo, monotonía, etc). Gracias a la teoría de límites de sucesiones podemos definir el límite de funciones, continuidad de funciones, derivabilidad de funciones, etc.

Además, está claro que, al igual que en el caso real, si $(z_n)_n$ tiene límite, entonces $(z_n)_n$ es acotada, pero no al contrario.

Definición 1.1.6 *Una sucesión $(z_n)_n$ es de Cauchy (o fundamental) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$, se cumple $|z_n - z_m| < \epsilon$. O, equivalentemente, z_n es de Cauchy si y solo si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tal que}\ \forall n > N,\ \textit{y}\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_{n+p} - z_n| < \epsilon,$$

o, equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tal que}\ \forall n > m > N, \quad |z_n - z_m| < \epsilon,$$

Teorema 1.1.7 (Criterio de Cauchy) *Para que una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ sea de convergente es necesario y suficiente que sea de Cauchy.*

Demostración: La prueba se basa en la equivalencia entre $z_n = x_n + iy_n$ y las sucesiones reales $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$. En efecto, basta notar que

$$\text{máx}\{|x_n - x_{n+p}|, |y_n - y_{n+p}|\} \leq |z_n - z_{n+p}| \leq |x_n - x_{n+p}| + |y_n - y_{n+p}|,$$

luego está claro que si z_n es de Cauchy, x_n e y_n también lo son, luego $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ pues $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son ambas sucesiones reales para las cuales es cierto el criterio de Cauchy. Luego $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z = x + iy$. ■

De la equivalencia entre las sucesiones reales y complejas (ver Nota 1.1.5) se sigue inmediatamente el siguiente teorema:

[2]El lector no familiarizado con dichas definiciones puede consultar, por ejemplo, el capítulo 3 de la magnífica monografía [12]

Teorema 1.1.8 (Propiedades algebraicas de los límites) *Sean dos sucesiones convergentes* $(a_n)_n$ *y* $(b_n)_n$ *con* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*, y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$.
3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n \neq 0$*, y* $b \neq 0$*, entonces,* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Definición 1.1.9 *Un punto* z *de un conjunto* $E \subset \mathbb{C}$ *es interior si existe un entorno* $U_\epsilon(z)$ *del mismo contenido por completo en* E*. Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.*

Evidentemente todo entorno $U_\epsilon(z)$ de z es un abierto.

Definición 1.1.10 *Dado un conjunto* $E \subset \mathbb{C}$ *diremos que* $z_0 \in \mathbb{C}$ *es un punto de acumulación de* E *si el cualquier entorno* $U_\epsilon(z_0)$ *existe al menos un punto de* E *distinto de* z_0 *(y por tanto infinitos).*

Por ejemplo, 0 es un punto de acumulación del conjunto $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, mientras que 10^{-k}, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$ no lo es.

De la definición 1.1.10 se sigue inmediatamente el siguiente

Teorema 1.1.11 z_0 *es un punto de acumulación de* E *si y sólo si existe al menos una subsucesión de números* $(z_n)_n$*, con* $z_n \neq z_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Definición 1.1.12 *Un conjunto* E *es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Por ejemplo en conjunto $\overline{U}_\epsilon(z_0) =: \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq \epsilon\}$ es un cerrado.

Definición 1.1.13 *Un conjunto* E *es acotado si existe un* $M > 0$ *tal que, para todo* $z \in E$*,* $|z| < M$.

A partir de Lema del Bolzano-Weierstrass para los conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ se sigue el siguiente resultado:

Lema 1.1.14 (Bolzano-Weierstrass) *Cualquier subconjunto infinito*[3] *acotado de* $\mathbb{C}$ *tiene por lo menos un punto de acumulación.*

[3] Con un número infinito de elementos.

1.2. Series

1.2.1. Series numéricas

Definición 1.2.1 *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

se denomina serie infinita o serie y a los números a_1, a_2, ..., elementos de la serie. Las sumas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

se denominan sumas parciales de la serie.

Definición 1.2.2 *Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a S, si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ tiene límite finito S y a dicho número le denominaremos "suma" de la serie. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

El Criterio de Cauchy para las sucesiones establece que una sucesión $(x_n)_n$ es convergente si y sólo si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$ tal que si $n > N,$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ entonces $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$. Una simple aplicación del mismo a la sucesión de sumas parciales nos conduce a nuestro primer criterio de convergencia para las series.

Teorema 1.2.3 (Criterio de Cauchy para las series) *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si , para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n > N$ y para todo $p \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$*

Este teorema tiene dos consecuencias inmediatas: la primera es que si alteramos un número finito de elementos de la serie, la convergencia de ésta no se afecta; y la segunda es el siguiente resultado:

Teorema 1.2.4 (Condición necesaria de convergencia de una serie) *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración: Basta tomar $p = 1$ en el teorema 1.2.3. ■

Es *fácil* ver, a partir del teorema anterior que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{300n + n^2}$ es divergente. Con algo de más trabajo se puede probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es divergente, lo cual ilustra que las condiciones del teorema 1.2.4 son necesarias pero no suficientes.

Una propiedad de las series convergentes es que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k$ también es convergente, además

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{C}.$$

Nótese, además, que del carácter convergente de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ no se puede inferir el carácter convergente o divergente de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (¿por qué?).

Definición 1.2.5 *Diremos que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente.*

Teorema 1.2.6 (Weierstrass) *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente si y sólo si la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ está acotada.*

Demostración: La sucesión $(S_n)_n$ de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ es una sucesión monótona, luego si está acotada, entonces existirá el límite que es precisamente la suma de la serie. Por el contrario, si la sucesión $S_n \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ es no acotada, entonces la serie será divergente. ■

A partir del criterio de Cauchy 1.2.3 se sigue el siguiente teorema:

Teorema 1.2.7 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Un ejemplo sencillo, y de gran importancia, de serie absolutamente convergente es la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Recordemos a continuación algunos criterios para estudiar la convergencia de series. El primero, y uno de los más sencillos, es el criterio de comparación. Su demostración es una simple consecuencia del teorema de las sucesiones monótonas y acotadas similar a la prueba del teorema 1.2.6.

Teorema 1.2.8 (Criterio de Comparación de Weierstrass) *Sean las series de números complejos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|a_n| \leq |b_n|$, entonces si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ converge, y si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ diverge.*

Ejercicio 1.2.9 Prueba, calculando el límite de sus sumas parciales, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Usando lo anterior y el criterio de comparación deduce la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorema 1.2.10 (Criterio de comparación por paso al límite) *Sean las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q > 0$. Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge si y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge.*

Demostración: Este teorema es una consecuencia del teorema de comparación. Como $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = q > 0$, ello significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$, $|a_n/b_n - q| < \epsilon$. Luego, si tomamos $\epsilon = q/2$, a partir de cierto N tendremos que

$$\frac{1}{2} q b_n < a_n < \frac{1}{3} q b_n \,,$$

de donde, utilizando el criterio de comparación, se obtiene el resultado buscado. ■

Ejercicio 1.2.11 Estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Nota: De la prueba del Criterio de comparación por paso al límite se deduce que si $q = 0$, sólo podemos afirmar lo mismo que en el teorema de comparación es decir, que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ converge, y si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ diverge.

Veamos ahora dos criterios donde se involucra una única serie, es decir sólo precisamos la información relacionada con la serie que queremos estudiar.

Teorema 1.2.12 (Criterio del cociente de D'Alembert) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q$. *Entonces,*

1. *Si* $q < 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente*
2. *Si* $q > 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es divergente.*
3. *Si* $q = 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *puede ser convergente o divergente.*

Demostración: Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$, entonces a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$, existe un $\alpha \in (0,1)$, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha < 1$. Por tanto,

$$|a_{n+1}| \leq \alpha |a_n|, \quad |a_{n+1} \leq \alpha^2 |a_{n-1}| \leq \alpha^2 |a_{n-2}| \Rightarrow |a_n| \leq \alpha^{n-N} |a_N| = C\alpha^n,$$

y el criterio de comparación, tomando $b_n = C\alpha^n$, nos conduce al resultado buscado. Análogamente se demuestra la divergencia en el caso $q > 1$. Como ejemplo del caso 3 tenemos los siguientes ejemplos $a_n = 1/n$ y $c_n = 1/n^2$, para las cuales obviamente $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, siendo la primera divergente y la segunda convergente. ■

Este criterio no siempre funciona aún en casos sencillos como el siguiente: sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$. Obviamente tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/6 & n \text{ par} \\ 3/2 & n \text{ impar} \end{cases},$$

luego no existe el límite del cociente. No obstante,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

y estas dos últimas obviamente son convergentes.

Teorema 1.2.13 (Criterio de la raíz de Cauchy) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. *Entonces,*

1. *Si $q < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente*
2. *Si $q > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.*
3. *Si $q = 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ puede ser convergente o divergente.*

Demostración: La demostración de este resultado se basa en si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, entonces a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a_n} \leq \alpha < 1$. Luego si utilizamos el criterio de comparación tomando $b_n = \alpha^n$ el resultado es inmediato. Nótese que si $q = 1$, entonces pueden ocurrir ambas posibilidades. El mismo ejemplo, $a_n = 1/n$ y $c_n = 1/n^2$, teniendo en ambos casos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, pero siendo la primera serie divergente y la segunda convergente. ■

Si aplicamos este criterio a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^k}$ tenemos

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{-1+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{2},$$

por tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ y según el criterio de Cauchy 1.2.13 converge.

El ejemplo anterior nos indica que el criterio de Cauchy es más general que el de D'Alembert en el sentido que el criterio de criterio de D'Alembert implica en de Cauchy, pero no viceversa.

Nota 1.2.14 *Debemos destacar que tanto en el criterio de D'Alembert como el de Cauchy antes descritos, el resultado sigue siendo cierto si cambiamos los límites por los límites superiores.*

Ejercicio 1.2.15 Estudia el carácter de las series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

1.2.2. Más sobre series de números reales

Vamos a discutir ahora algunas propiedades de las series de números reales. Comenzaremos considerando serie de gran importancia en las matemáticas –y fuera de ellas–: las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

Estas series se conocen como series armónicas. Ya vimos ejemplos de ellas cuando $p = 1$, serie que divergía, y $p = 2$, serie que convergía. Una pregunta evidente es ¿Para cuáles $p > 0$ converge la serie armónica?

Es evidente del teorema de comparación que para todo $p > 2$ la serie converge y que para $p < 1$ diverge. Ahora bien, para $1 < p < 2$ no nos sirve el teorema de comparación y un calculo sencillo nos muestra que tanto el criterio de Cauchy como el de D'Alembert nos dan 1 con lo cual no son concluyentes. ¿Cómo resolver este problema?

Teorema 1.2.16 (Criterio de McLaurin-Cauchy) *Sea $f(x)$ una función real no negativa definida en $[1, +\infty)$ y monótona decreciente en todo su dominio. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tienen el mismo carácter de convergencia.*

Demostración: Como f es decreciente y no negativa, tenemos que para todo $k = 0, 1, \ldots$ y $x \in [k, k+1]$, $0 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, por tanto, usando la monotonía de la integral de Riemann –recuérdese que si f es monótona, entonces es integrable–, tenemos

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Luego, usando la aditividad de la integral,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

es decir, para las sumas parciales S_n de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la función $F(t) \equiv \displaystyle\int_1^t f(x)dx$, tenemos

$$S_{n+1} - f(1) \leq F(n+1) \leq S_n.$$

De la desigualdad anterior deducimos que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, entonces sus sumas parciales S_n son acotadas, y por tanto la función $F(t)$ es acotada, luego existe el límite $\lim_{t\to\infty} F(t)$, es decir, existe la integral impropia. Además, si existe la integral impropia, entonces la sucesión $F(n+1)$ es acotada, por tanto las sumas S_{n+1} también lo son, de donde deducimos que la serie converge (ver teorema 1.2.6).

Si por el contrario la serie no converge, entonces las sumas parciales no están acotadas y por tanto F tampoco lo está, luego la integral impropia diverge. Análogamente, si la integral impropia no converge, entonces F es no acotada, luego S_n es no acotada y la serie diverge. ■

Ejercicio 1.2.17 Estudiar el carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ y $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ para $p > 0$ usando el criterio integral.

Reordenación de términos en una serie

Dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, construyamos una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ obtenida de la anterior mediante la reordenación de un número infinito de términos, es decir todos los términos de las sucesiones $(a_n)_n$ y $(a'_n)_n$ coinciden pero están, en general, situados en distintos sitios.

Teorema 1.2.18 *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ también es absolutamente convergente y su suma coincide con la de la serie original.*

Demostración: Supondremos que la reordenación involucra a un número infinito de términos –si es un número finito sabemos que el resultado es cierto–. Denotemos por S la suma $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y S' la suma $S' = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$.

Supongamos que nuestra serie tiene todos sus términos positivos. Sean $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a'_k$ las sumas parciales de la serie reordenada. Escojamos ahora un $N \in \mathbb{N}$ tal que todos los elementos del conjunto $\{a'_1, a'_2, \ldots a'_n\}$ estén contenidos en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots a_N\}$. Entonces, obviamente $S'_n \leq S_N$. Pero la serie original es convergente, luego la serie S converge luego las S_n están acotadas y por tanto el conjunto de las sumas parciales de S' es acotado, luego S' converge. Además $S' \leq S$. Para probar que $S' = S$ procedemos al contrario, es decir Dado $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ escojamos un $N \in \mathbb{N}$ tal que todos los elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ estén contenidos en el conjunto $\{a'_1, a'_2, \ldots a'_N\}$. Entonces, obviamente $S_n \leq S'_N$ y por tanto, como hemos probado que S' converge tenemos $S \leq S'$ de donde deducimos que ambas series convergen y suman lo mismo.

Supongamos a continuación que la serie S tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos –si alguno de ellos fuese un número finito el

teorema estaría probado–. Entonces, si denotamos por a_n^+ y a_n^- a los términos positivos y negativos, respectivamente, tendríamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-, \qquad \text{además} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k^-),$$

de donde se deduce que ambas series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ convergen. Sea, como antes, S' nuestra serie reordenada, entonces:

$$S' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+)' + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^-)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

pues ambas series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, convergen absolutamente y sus términos tienen todos el mismo signo. ■

Este resultado sólo es cierto para las series absolutamente convergentes. Veamos el siguiente ejemplo.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Esta serie es convergente (probar como ejercicio), pero no lo hace absolutamente. Además, como

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{1+\xi} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{con} \quad \xi \in (0, x),$$

tenemos, sustituyendo $x = 1$, que

$$\left| \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

es decir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots = \log 2 \neq 0.$$

Reordenemos la serie

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
S' &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots \\
&\qquad +\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\cdots \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\cdots\right] \\
&= \frac{S}{2}=\frac{\log 2}{2},
\end{aligned}$$

es decir ¡nuestra reordenación cambia el valor de la serie!

Definición 1.2.19 *Diremos que una serie es condicionalmente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.*

Teorema 1.2.20 (Teorema de reordenación de Riemann) *Las series condicionalmente convergentes se pueden reordenar de tal forma que sumen cualquier valor real prefijado de antemano.*

Demostración: Sea $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nuestra serie. Obviamente S tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos –pues si alguno de ellos fuese finito la serie seria absolutamente convergente–. Como antes denotaremos por a_n^+ y a_n^- a los términos positivos y negativos, respectivamente, y sean

$$S^+=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \qquad \text{y} \qquad S^-=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

las correspondientes series de términos positivos y negativos y S_n^+ y S_n^- las sumas parciales de las mismas. Sean N^+ y N^- dos números naturales suficientemente grandes. Como

$$|S|_N := \sum_{k=1}^{N} |a_k| = \sum_{k=1}^{N^+} a_k^+ + \sum_{k=1}^{N^-} (-a_k^-) = S_{N^+} - S_{N^-},$$

entonces, para N^+ y N^- tendiendo a infinito se tiene que o S^+ tiende a $+\infty$ o S^- tiende a $-\infty$, pues si ambas convergieran, la serie S sería absolutamente convergente. Probemos que ambas series S^+ y S^- divergen. Supongamos que una de las dos series, digamos S^+, converge, entonces como

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N^+} a_k^+ + \sum_{k=1}^{N^-} a_k^{'}$$

y S^- es necesariamente divergente, S tendría que ser divergente, lo cual es una contradicción. Por tanto, y como ambas series S^+ y S^- son series de términos del mismo signo, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = +\infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^- = -\infty.$$

Para probar el teorema vamos a fijar un número L cualquiera y vamos construir una reordenación de $(a_n)_n$ tal que la suma de nuestra serie S' sea L, es decir, $L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Por comodidad tomaremos $L > 0$ –el caso $L < 0$ es análogo–. Como $\lim S_n^+ = +\infty$, los n_1 primeros términos de nuestra nueva serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ los escogemos, consecutivamente tomando los primeros términos positivos de la sucesión $(a_n)_n$ hasta que tengamos que $S_{n_1}^+ > L$. Así la suma parcial $S_{n_1}^+ = \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ > L$. Como $\lim S_n^- = -\infty$, vamos a seguir construyendo nuestra reordenación con los primeros m_1 términos negativos de la sucesión $(a_n)_n$ hasta que tengamos que $S_{n_1}^+ + S_{m_1}^- < L$. Y así sucesivamente construimos una sucesión de sumas parciales

$$S_k' = S_{n_1}^+ + S_{m_1}^- + S_{n_2}^+ + S_{m_2}^- + \cdots + S_{n_k}^+ + S_{m_k}^-,$$

tomando los términos positivos o negativos de $(a_n)_n$ de forma que en cada paso (o bloque de sumandos de un signo dado) estamos a la derecha o a la izquierda de L. Además, como nuestra serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego para todo $\epsilon > 0$ siempre existe los valores $N = n_1 + \cdots + n_k$ y $M = m_1 + \cdots + m_k$ tales que si $n > K = N + M$, $a_n^+ < \epsilon$ y $|a_n^-| < \epsilon$ para todo $n > K$.

Probemos a continuación que la serie S', construida de esta forma, tiene límite L. Por construcción notemos que si escogemos $n > K$, siendo K el encontrado anteriormente, entonces $|S_n - L|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera. En efecto, supongamos que n corresponde justo al último sumando, a_k', de la suma S_k', que no es más que el último sumando

de $S^+_{n_k}$ o $S^-_{m_k}$, es decir, $a^+_{n_k}$ o $|a^-_{n_k}|$ entonces $|S_n - L| < |a'_k|$, y éste es en valor absoluto menor que ϵ como ya hemos visto. Es decir, si nos detenemos justo cuando en nuestro proceso saltamos por encima de L, entonces $|S_n - L| < \epsilon$.

Si ahora $n > K$, que no sea el último sumando de $S^+_{n_k}$ o $S^-_{m_k}$, entonces como todos los a'_n son tales que $|a'_n| < \epsilon$ si $n > K$, entonces vuelve a ser $|S_n - L| < |a'_k|$, siendo a'_k nuevamente el último sumando de la suma $S^+_{n_k}$ o $S^-_{n_k}$ anterior con lo que sigue siendo $|S_n - L| < \epsilon$. Por tanto, existe un K suficientemente grande tal que la diferencia $|S_n - L|$ se puede hacer tan pequeña como se quiera para todo $n > K$, luego la serie S' tiene como suma a L. ■

1.2.3. Series de potencias

Las definiciones y teoremas anteriores nos permiten definir y estudiar las series de potencias en $\mathbb{C}$.

Definición 1.2.21 *Dada una sucesión de números complejos* $(a_n)_n$ *y* $z_0 \in \mathbb{C}$ *definiremos serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.2.1}$$

que denominaremos serie de potencias.

Como casos especiales de las series de potencias tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

etc. Si la serie converge para todos los valores de z de cierto conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces podemos definir la función suma $f(z)$ de la serie.

Propiedades de las series de potencias

Sin pérdida de generalidad vamos a considerar las series de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.2.2}$$

es decir, cuando $z_0 = 0$. Obviamente si tenemos una serie de potencias del tipo (1.2.1), la podemos reducir a la anterior (1.2.2) haciendo el cambio de variables $\zeta = z - z_0$ y viceversa.

Teorema 1.2.22 (Primer Teorema de Abel) *Sea la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. *Si la serie converge para cierto* $w \in \mathbb{C}$, *entonces la serie converge absolutamente para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| < |w|$.

Demostración: Asumiremos que $w \neq 0$ pues de lo contrario el teorema es trivial (sólo habría convergencia para $z = 0$). Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ es convergente, entonces por el teorema 1.2.4 sabemos que $a_n w^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, así pues, la sucesión $a_n\, w^n$ está acotada, luego existe un $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n w^n| \leq M$, luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{w}\right|^n.$$

pero como $|z| < |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{w}\right|$ es convergente, luego el criterio de comparación de Weierstrass 1.2.8 nos asegura la convergencia absoluta de la serie para $|z| < |w|$. ■

Corolario 1.2.23 *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge para algún número complejo* w, *entonces diverge para todo* z *con* $|z| > |w|$.

Por tanto, el teorema de Abel nos asegura la existencia de regiones (círculos) de convergencia y divergencia, de una serie de potencias en $\mathbb{C}$. De hecho podemos afirmar que dada una serie de potencias cualquiera siempre existe un número no negativo $R \geq 0$ ó $R = +\infty$ tal que para todo z con $|z| < R$ la serie converge y si $|z| > R$ la serie diverge.

Definición 1.2.24 *El número* $R \geq 0$ *anterior se denomina radio de convergencia de una serie de potencias.*

Nota 1.2.25 *De lo anterior se deduce que la región de convergencia de una serie de potencias es un círculo en el plano complejo que, en el caso de las series de la forma* (1.2.2) *está centrado en el origen y en el de las series* (1.2.1)*, en* z_0 *(ver la figura 1.1). Nótese que se puede obtener una región de la otra simplemente mediante una traslación (mediante el vector* z_0*) en el plano complejo.*

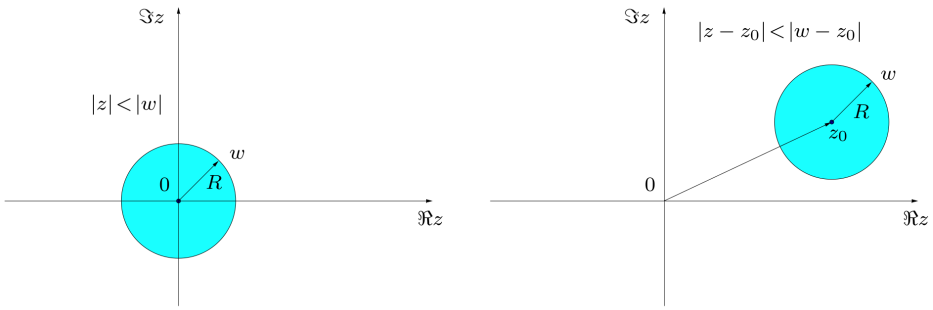


Figura 1.1: Región de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (izquierda) y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (derecha).

Teorema 1.2.26 (Segundo Teorema de Abel) *Toda serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*,* a_n*,* $z \in \mathbb{C}$*, tiene radio de convergencia* $R \geq 0$ *ó* $R = +\infty$ *. Además, la serie converge absolutamente para todo* z *tal que* $|z| < R$*.*

Demostración: Sea

$$A = \left\{ \rho,\ \rho \geq 0;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \text{ converge} \right\}.$$

El conjunto A es no vacío pues para $\rho = 0$, la serie siempre converge. Entonces o bien $\sup A = +\infty$, o bien $\sup A < +\infty$. Sea $R = \sup A$. Si $R = 0$, entonces la serie sólo converge en $z = 0$. Si $R = +\infty$ la serie obviamente converge para todo z complejo y además por el teorema de Abel lo hace absolutamente. Si $R < +\infty$, entonces por el teorema de Abel la serie converge para todo $|z| < \rho < R$ y lo hace absolutamente. Además, por el corolario del primer Teorema de Abel la serie diverge para todo $|z| \geq \rho > R$, así pues R es el radio de convergencia. ■

Nota 1.2.27 *Del teorema anterior se sigue que la mayor región de convergencia de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *es el disco* $U_R(0)$.

Ejercicio 1.2.28 *Estudiar la convergencia de las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Veamos ahora un criterio general para encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias. Como corolario del criterio de Cauchy para las series tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.29 (Fórmula de Cauchy-Hadamard) *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, su radio de convergencia* R *viene dado por la fórmula*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.2.3}$$

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$. Sea que $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = q$. Como

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|},$$

entonces, usando el criterio generalizado de Cauchy 1.2.13 (ver la Nota 1.2.14), nuestra serie original converge sólo si $|z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ y además diverge si $|z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Obviamente si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, entonces la convergencia es para todo z, y por tanto en este caso $R = +\infty$. Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, entonces la serie converge sólo para $z = 0$, y por tanto $R = 0$. Finalmente, si $0 < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, nuestra serie converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$ con $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, es decir R es el radio de convergencia de la serie. ■

En particular, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, entonces $R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, entonces (ver el criterio de D'Alembert) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Ejercicio 1.2.30 *Repetir el estudio para las series del ejemplo 1.2.28.*

Ejercicio 1.2.31 *Calcular el radio de convergencia para las series de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}.$$

Nótese que las series anteriores son tales que no todos los coeficientes a_n son distintos de cero. De hecho solo aparecen los pares o los impares.

Teorema 1.2.32 *Sea una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces*

1. *Para todo $k \geq 1$ la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}, \tag{1.2.4}$$

   tiene radio de convergencia R.

2. *La función $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$ y la k-ésima derivada de f, $f^{(k)}(z)$, viene dada por la serie (1.2.4).*

3. *Para todo $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.*

Demostración: Asumiremos que $R > 0$. Para demostrar 1 es suficiente estudiar el caso $k = 1$ (para $k \geq 2$ el razonamiento es el mismo). Para $k = 1$ la serie (1.2.4) es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 1/z \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$, y claramente $\limsup \sqrt[n]{n a_n} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$ pues $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Probemos 2. Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \; R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \; g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k,$$

y escojamos z_0 tal que $|z_0| < r < R$. Entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left[\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right] + [S_n'(z_0) - g(z_0)] + \left[\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}\right].$$

Vamos a probar que cada sumando se puede hacer lo suficientemente pequeño. Comencemos por el tercero. Para ello nótese que

$$\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0},$$

pero

$$\left| \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} \right| = |z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + z^{k-3}z_0^2 + \cdots + z_0^{k-1}| \leq kr^{k-1},$$

luego entonces escogiendo $n > N_1$, suficientemente grande

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| kr^{k-1} \leq \frac{\epsilon}{3},$$

pues la serie $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$ converge absolutamente para todo z con $|z| < R$.

Para el segundo sumando notemos nuevamente que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$ converge absolutamente para todo z con $|z| < R$, luego para dicho z_0 existirá un N_2 tal que para todo $n > N_2$, $|S_n'(z_0) - g(z_0)| \leq \epsilon/3$. Sea $n > N = \text{máx}(N_1, N_2)$, entonces parta dicho n, en virtud de que $S_n(z)$ es diferenciable en z_0 (¿por qué?), existe un $\delta > 0$, tal que, para todo $z \in 0 < |z - z_0| < \delta$,

$$\left[\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0) \right] < \frac{\epsilon}{3}.$$

Juntando las tres desigualdades se sigue que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que, para todo $z \in 0 < |z - z_0| < \delta$,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| < \epsilon,$$

i.e., $f'(z_0) = g(z_0)$ que es lo que se quería probar.

Finalmente 3. se deduce de 1. y 2. sustituyendo en la fórmula

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k},$$

el valor $z = 0$. ■

Como consecuencia del teorema anterior se sigue que si $f(z)$ admite una serie de potencias, $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$, y cada una de las funciones $f^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, es continua en $U_R(0)$. Del tercer apartado se tiene además que la serie de potencias de una función dada coincide con la correspondiente serie de Taylor.

Ejercicio 1.2.33 *Prueba que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k/k!$ es infinitamente diferenciable y que $f'(z) = f(z)$, es decir, $f(z) = e^z$.*

1.2.4. Analiticidad de las funciones reales

Una de las principales diferencias entre las funciones complejas de variable compleja y las funciones reales de variable real está precisamente relacionada con la diferenciación y analiticidad. En el análisis real se dice que una función $f(x)$ es analítica en un entorno de un punto z_0 si en dicho entorno $f(x)$ se puede escribir como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con radio de convergencia $R > 0$. Una propiedad muy importante de las series de potencias (reales o complejas) es que son infinitamente diferenciables. ¿Será cierto el recíproco? ¿Toda función C_A^∞ será analítica en algún entorno de $x_0 \in A$?

La respuesta a esta pregunta la dio Cauchy, en 1821. Definamos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es infinitas veces derivable en $x = 0$ (de hecho en todo $\mathbb{R}$) además $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego su serie de Taylor en $x = 0$ es 0 y por tanto $f(x)$ no admite una serie de potencias en cero (o lo que es lo mismo, el radio de convergencia de la correspondiente serie es 0), i.e., la función de Cauchy no es analítica en $x_0 = 0$.

Teorema 1.2.34 (Condición necesaria y suficiente de analiticidad) *Una función $f(x)$ infinitamente derivable en todo un entorno de $x = x_0$ es*

analítica si y solo si el resto de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - x_0)^k,$$

tienda a cero para todo x de dicho entorno.

Demostración: Sea

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{1.2.5}$$

el polinomio de Taylor de f en el punto x_0 de una función f infinitas veces derivable en $x = x_0$ y sea $R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$ el resto o error de Taylor. Obviamente el polinomio de Taylor $P_n(x, x_0)$ coincide con las sumas parciales de la serie de potencias de f, luego $P_n(x, x_0)$ converge a $f(x)$ en $(x_0 + R, x_0 - R)$ si y sólo si $R_n(x, x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in (x_0 + R, x_0 - R)$. ■

El caso complejo es mucho más *sencillo*. De hecho se tiene el siguiente sorprendente resultado cuya demostración omitiremos (ver por ejemplo *A.I. Markushevich. Teoría de las funciones analíticas*):

Teorema 1.2.35 (Goursat) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (abierto y conexo) y sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función diferenciable (holomorfa). Entonces, para cada punto $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ admite una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$.*

1.3. Continuidad uniforme

1.3.1. Definición de continuidad uniforme

Recordemos la definición de continuidad de una función en un conjunto $A \in \text{Dom}\,(f)$.

Definición 1.3.1 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es continua en A si*

$\forall \epsilon > 0,\ \forall a \in A,\ \exists \delta := \delta(a, \epsilon) > 0;$ *tal que si* $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$

Hemos de destacar que en la definición anterior δ depende, en general, no sólo de ϵ, sino también del punto a. Veamos un ejemplo.

Sea $f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$. f es continua, de hecho lo será en cualquier intervalo que no contenga al cero. Para probarlo usamos la definición. Puesto que

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{x-a}{x\,a}\right| = \frac{1}{|x\,a|}|x-a|.$$

Si $a > 0$ entonces podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty)$, $1/|x\,a| < M$, de hecho, M es más grande a medida que a se acerque más a cero. En efecto, puesto que $1/x$ es decreciente tenemos que si $a \neq 0$ siempre podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ (basta elegirlo menor que $a/2$) tal que $1/x \leq 1/(a/2) = 2/a$. Es decir,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2}{a^2}|x-a|, \qquad \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty).$$

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, entonces si x es tal que $0 < |x - a| < \delta = \frac{a^2}{2}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. En la figura 1.2 se muestra lo que ocurre.

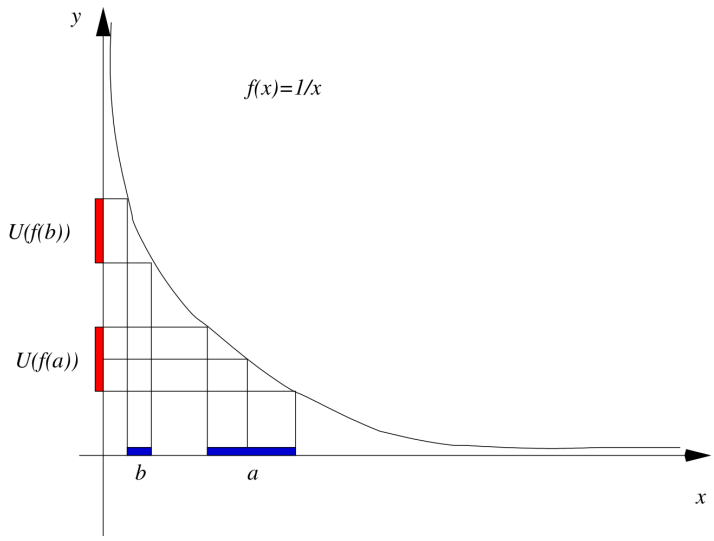


Figura 1.2: La función $f(x) = 1/x$, y la continuidad uniforme.

Si prefijamos un $\epsilon > 0$ tenemos los dos entornos $U(f(a))$ y $U(f(b))$ con $b < a$. Obviamente a medida que nos acercamos a cero el correspondiente

entorno de a, $U(a)$ se hace cada vez más pequeño además la longitud del mismo, como hemos visto es igual a $d = \frac{a^2}{2}\epsilon$, así que si $a \to 0$, $d \to 0$.

No ocurre lo mismo si escogemos, por ejemplo, en intervalo $[\alpha, 1]$ cualquiera sea $\alpha \in (0, 1)$. En efecto, en este caso, nuestra desigualdad será

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2}{a^2}|x - a| < \frac{2}{\alpha^2}|x - a|, \quad \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty).$$

Es decir que cualquiera sea $\epsilon > 0$, entonces si x es tal que $0 < |x - a| < \delta = \frac{\alpha^2}{2}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, o sea, ¡nuestro δ en este caso no depende del punto a!, o sea, el mismo δ nos vale para todo el intervalo.

Otro tanto le ocurre a la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \infty)$. Para $a > 0$ calculemos[4]

$$|f(x) - f(a)| = (x + a)|x - a| < (2a + \delta_1)|x - a|, \quad \text{si} \quad x \in (a - \delta_1, a + \delta_1).$$

Sea $\delta_1 = 1$, por ejemplo. Entonces, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si x es tal que $|x - a| < \delta = \frac{1}{2a+1}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, es decir, que a medida que a aumenta δ disminuye. Nuevamente no podemos obtener un δ válido para todo $a \geq 0$. Que ocurre si escogemos el intervalo $[0, b]$, $b < \infty$. Entonces,

$$|f(x) - f(a)| = (x + a)|x - a| < (2b)|x - a|, \qquad \forall x \in [0, b],$$

luego, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si x es tal que $|x - a| < \delta = \frac{1}{2b}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, es decir nuevamente δ no depende del punto a, por tanto el mismo δ nos vale para toda el intervalo.

Definición 1.3.2 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es uniformemente continua en un intervalo $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos x e y de $[a, b]$, tales que $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Es decir, para cualquiera sea el punto x de $[a, b]$ que escojamos, $f(x)$ es continua y el δ en la definición anterior, a diferencia del de la definición de continuidad "estándar" 1.3.1 sólo depende de ϵ y no del punto, o equivalentemente, que si escogemos un $\epsilon > 0$ cualquiera y denotamos por $U(f)$ el ϵ-entorno de cualquier punto $y = f(x)$ de la imagen, entonces, existe un $\delta > 0$ tal que los correspondientes δ-entornos de x, $U(x)$ son tales que $f(U(x)) \subset U(f)$.

[4] Si $a = 0$ obviamente f es continua, además, las desigualdades también son válidas para $x \geq 0$.

Es evidente que cualquier función uniformemente continua en $[a, b]$ es continua en dicho intervalo. Ahora bien, el recíproco, como hemos visto, no es cierto. Por tanto, es interesante tener teoremas que nos aseguren cuando una función es uniformemente continua y cuando no. Nótese que una función no es uniformemente continua en $A \subset \mathbb{R}$ si

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0 \exists x, a \in A; \quad |x - a| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Teorema 1.3.3 *Una función f* no *es uniformemente continua en A si existe un $\epsilon > 0$ y dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $|a_n - b_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tales que $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$.*

Demostración: Es inmediata a partir de la definición de convergencia uniforme (o lo que es lo mismo de su negación). ■

Ejercicio 1.3.4 *Prueba que $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2$ no son uniformemente continuas en $(0, 1]$ y $[0, \infty)$, respectivamente, usando el teorema anterior.*

En el primer caso escogemos $a_n = 1/n$ y $b_n = 1/(n+1)$, $a_n - b_n = 1/(n(n+1)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero $|f(a_n) - f(b_n)| = 1$. Para el segundo caso escogemos $a_n = \sqrt{n+1}$ y $b_n = \sqrt{n}$, de forma que $a_n - b_n = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero $|g(a_n) - g(b_n)| = 1$.

El siguiente teorema nos da un criterio muy útil para saber cuando una función es uniformemente continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$:

Teorema 1.3.5 *(Heine)*[5] *Si la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo $[a, b]$ entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración: Supongamos que el teorema es falso. Entonces

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0 \exists x, y \in A; \quad |x - y| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, si escogemos $\delta = 1/n$, existen dos números a_n y b_n tales que $|a_n - b_n| < 1/n$ y $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$, o sea, podemos construir

[5] Este teorema, a veces atribuido a Cantor, también es cierto para funciones de varias variables: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado (compacto) y sea la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$, continua en A. Entonces f es uniformemente continua en A.

sendas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Ahora bien, como a_n es acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones existe una subsucesión $\{a_{k_n}\}$ convergente a cierto $x \in [a, b]$. Tomemos ahora la subsucesión $(b_{k_n})_n$ donde k_n es exactamente la misma subsucesión de números naturales que define a la subsucesión $(a_{k_n})_n$ de antes. Para dicha subsucesión tenemos que

$$|b_{k_n} - x| \leq \underbrace{|b_{k_n} - a_{k_n}|}_{<1/n} + \underbrace{|a_{k_n} - x|}_{\to 0} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \Rightarrow b_{k_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

es decir la subsucesión $\{b_{k_n}\}$ de $\{b_n\}$ también tiene límite x. Pero f es continua en $[a, b]$ así que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} f(b_{k_n}) = f(x), \qquad \Rightarrow |f(a_{k_n}) - f(b_{k_n})| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual contradice que $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$ (ya que como $\{a_{k_n}\}$ y $\{b_{k_n}\}$ son subsucesiones de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tendría que ser $|f(a_{k_n}) - f(b_{k_n})| \geq \epsilon$). ■

El teorema anterior nos indica que la función $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua en cualquier cerrado y acotado que no contenga al cero y que la función $g(x) = x^2$ es uniformemente continua en cualquier cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

De la de la definición de continuidad uniforme se sigue (basta escoger $\delta < \epsilon/K$) el siguiente:

Teorema 1.3.6 *(Condición suficiente de continuidad uniforme) Para que la función f sea uniformemente continua en A, es suficiente que exista una constante $K > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.*

Las funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ que cumplen con que

$$\forall x, y \in A, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

se llaman *funciones de Lipschitz*. Así que el teorema anterior se puede parafrasear diciendo que toda función de Lipschitz es uniformemente continua.

Obviamente toda función de Lipschitz es continua, pero no viceversa, no toda función continua es de Lipschitz. Por ejemplo, $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$ (y por tanto uniformemente continua en $[0, 1]$) pero no es de Lipschitz en $[0, 1]$, pues

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}|x - y|,$$

y el factor $\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$ no es acotado en $[0, 1]$.

1.3.2. Sucesiones y series de funciones reales

Definición 1.3.7 *La sucesión de funciones* $(f_n(x))_n$ *tiene límite para cierto* $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ *si la sucesión numérica* $(f_n(x_0))_n$ *converge para dicho* x_0*. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en* x_0*,*

Definición 1.3.8 *El conjunto* $\mathbb{X}$ *de todos los puntos* $x \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ *donde la sucesión* $(f_n(x))_n$ *converge se denomina conjunto de convergencia de la sucesión de funciones.*

Evidentemente para todo $x \in \mathbb{X}$, existe un único valor del límite de sucesión numérica $(f_n(x))_n$, por tanto podemos definir una función $f(x)$ sobre $\mathbb{X}$ que es la función límite de $f_n(x)$. Así tenemos la siguiente

Definición 1.3.9 *En el conjunto* $\mathbb{X}$ *de convergencia de la sucesión de funciones* $(f_n(x))_n$ *la función* $f(x)$ *definida para cada* $x \in \mathbb{X}$ *de la forma* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *se denomina función límite de* $(f_n(x))_n$ *y se dice que la sucesión* $(f_n(x))_n$ *converge puntualmente a* $f(x)$ *en* $\mathbb{X}$ *y lo denotaremos como* $f_n(x) \to f(x)$*.*

Ejemplo 1.3.10 *Consideremos los siguientes ejemplos representativos.*

1. Definamos en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0,1]$, además
$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases},$$
es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \le q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

2. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

3. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Como en el ejemplo anterior $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

4. Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.

5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 0$. Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces a partir de cierto $m \in \mathbb{N}$, $m!x \in \mathbb{Z}$, por tanto, a partir de dicho m, $f_m(x) = 1$, luego $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 1$. Así, tenemos que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es la función de Dirichlet $D(x)$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} .$$

Nuestro objetivo fundamental es estudiar, no cuando las sucesiones funcionales convergen o no –pues eso ya lo hemos visto en temas anteriores pues para cada x la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica– sino decidir en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. ¿Hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$? Los ejemplos anteriores sirven de ilustración a nuestro problema.

En el ejemplo 1 las funciones x^n son continuas en $[0,1]$ pero la función límite $f(x)$ no lo es. No ocurre lo mismo en el intervalo $\mathbb{X} = [0,q]$.

En el ejemplo 2 la función $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su función límite también, pero por ejemplo, la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ no tiene límite excepto cuando $n^2 x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir la sucesión de derivadas no converge a la derivada de la función límite.

En el ejemplo 3, a diferencia del anterior la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ converge a cero que justamente es la derivada de la función límite. Es decir, en este ejemplo si que tenemos $f_n'(x) \to f'(x)$.

Analizando el ejemplo 4 vemos que la función $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ es integrable en $[0,1]$ y además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 2(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = 2(n+1)\left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1\right] = 1,$$

pero $\displaystyle\int f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, luego $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \not\to \int f(x)dx$.

A diferencia del caso anterior, podemos comprobar que en $[0,1]$ la función $f_m(x)$ del ejemplo 5 vale cero excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable (Riemann).

Finalmente, en el ejemplo 1 tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Todo lo anterior nos dice que dada una sucesión $f_n(x)$ con determinadas propiedades como la continuidad, derivabilidad, integrabilidad, la función límite puede o no tenerlas. Por tanto nuestro objetivo es claro. Encontrar condiciones bajo las cuales la función límite "herede" las propiedades de las funciones de la sucesión.

Definición 1.3.11 *Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{X}$ si para todo $x_0 \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x_0, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ y lo denotaremos $f_n \to f$.*

Claramente vemos que, en general, nuestro N dependerá de x_0. Consideremos como ejemplo la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0,1)$. Obviamente $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1)$. Sea $0 < \epsilon < 1$ cualquiera y $x_0 \in [0,1)$. Entonces, tendremos $|f_n(x_0) - 0| = x_0^n < \epsilon$. Si escogemos N tal que $x_0^N < \epsilon$, o equivalentemente $N \log x_0 < \log \epsilon$, tendremos, como $\log x_0 < 0$ que, para todo $n > N = \log \epsilon / \log x_0$, $x_0^n < \epsilon$. Es decir que nuestra N depende explícitamente de x_0 y lo que es peor, a medida que x_0 se va acercando a 1, N claramente va tomando valores más grandes. La siguiente figura 1.3 aclara lo anterior.

En la figura 1.3 (izquierda) vemos la sucesión $f_n(x) = x^n$ dibujada en $[0,1)$. Las curvas son, de arriba hacia abajo, x, x^2, $\ldots x^N$. La linea horizontal representa a nuestro $\epsilon > 0$ y la vertical a nuestro x_0. Como vemos, dado el $\epsilon > 0$ de la figura, luego de varios N tenemos que x_0^N es menor que el $\epsilon > 0$ dado –ver la quinta gráfica de arriba abajo–. Veamos que ocurre más cerca del 1, para ello quedémonos sólo con un pequeño intervalo cercano al 1, digamos $[q,1)$, estando q "suficientemente" cercano a 1. Aumentemos nuestro x_0 hasta hacerlo más próximo a 1 tal y como observamos en la figura de la derecha –la primera linea vertical era nuestro anterior x_0 y la

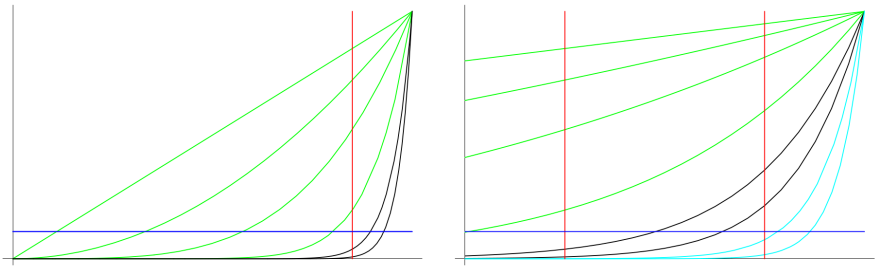


Figura 1.3: La sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1)$ (izquierda) y en $[q, 1)$ (derecha).

segunda, más a la derecha es nuestro nuevo x_0–. Como vemos, ahora tenemos que aumentar nuestro N hasta llegar a la séptima curva. En ambos casos las primeras seis curvas son las misma.

A modo de ejemplo, tomaremos los valores numéricos. Numéricamente hemos escogidos los siguientes valores $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}85$ y el N necesario fue 20. En el segundo caso $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}95$ y el N necesario fue 50. Obviamente a medida que nos acercamos a 1 nuestro N crecerá tal y como hemos mostrado antes.

Una pregunta evidente es la siguiente. ¿Cualquiera sea una sucesión $f_n(x))_n$ siempre ocurrirá lo mismo. Para responderla consideremos el siguiente ejemplo: Sea la misma sucesión $f_n(x) = x^n$ pero en $[0, q]$ con $q \in (0, 1)$.

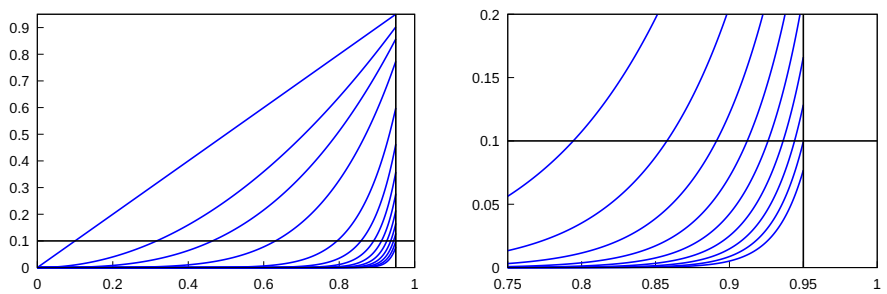


Figura 1.4: La sucesión $f_n(x) = x^n$, en $[0, q]$ (izq.) y una ampliación (der.)

Hagamos un experimento numérico como el anterior usando como antes $\epsilon = 0{,}1$. En la figura 1.4 representaremos nuevamente mediante linea

horizontal a nuestro $\epsilon > 0$, la primera linea vertical corresponderá a un x cualquiera en $[0, q]$ y la segunda linea vertical corresponderá a q, el extremo del intervalo. Dibujaremos la sucesión x^n para que se vea con más claridad el comportamiento de la misma. Obviamente $x \leq q$, así que escogeremos $q = 0{,}95$, por ejemplo. Un simple vistazo a la figura 1.4 nos permite ver que cualquiera sea el $x \leq q$ que escojamos, dado el $\epsilon > 0$ tenemos un valor de N, que en nuestro caso corresponde a la séptima gráfica tal que $x^n < \epsilon$ para todo $n > N$ y ¡cualquiera sea la $x \in [0, q]$! Es decir podemos encontrar una N válida en todo punto de $[0, q]$. En realidad esto no es de extrañar pues para todo $\epsilon > 0$ si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces tendremos $q^n < \epsilon$, por tanto para todo $x \in [0, q]$, y para todo $n > N$ tendremos $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir x^n tiende a 0 en todo $[0, q]$ y además lo hace *uniformemente* en todo el intervalo.

Lo anterior nos conduce de manera natural a la siguiente

Definición 1.3.12 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en un intervalo $I \in \mathbb{X}$, diremos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, y lo denotaremos $f_n \rightrightarrows f$.*

Gráficamente la convergencia uniforme está representada en la figura 1.5, gráfico de la izquierda. La función f está al centro y está localizada en

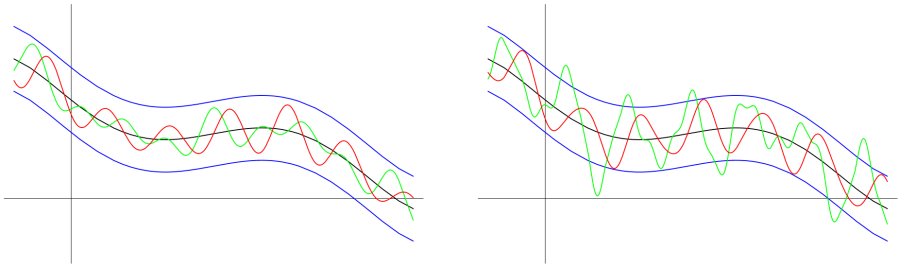


Figura 1.5: Convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$.

el interior de cierto entorno de longitud ϵ. Cualquiera sea la $x \in I$, $f_n(x)$ debe estar contenida en el entorno $(f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$ tal y como se muestra en dicha figura. En esta misma figura 1.5 podemos ver a la derecha lo

que ocurre cuando la convergencia es no uniforme. Y es que para todo n siempre existe un x tal que $f_n(x)$ sale fuera del entorno $(f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$. Es evidente que si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $f_n \to f$.

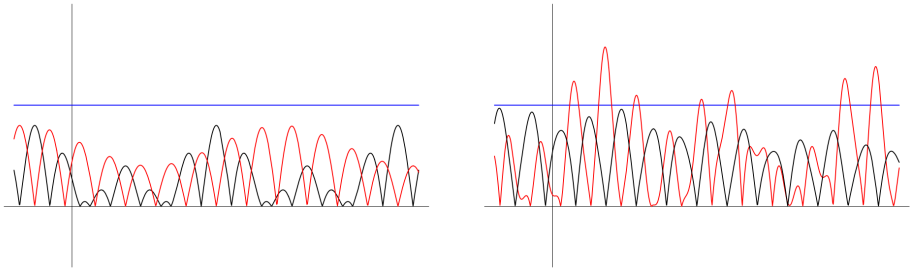


Figura 1.6: Gráficos de $|f(x) - f_n(x)|$ en el caso de la convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de $(f_n(x))_n$.

Nuestro próximo objetivo es dar condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funciones converja uniformemente. Para ello vamos a considerar las funciones representadas en la figura 1.5. Vamos a representar gráficamente –ver gráfico 1.6– las funciones $|f(x)-f_n(x)|$ de la figura 1.5. La línea horizontal representa el valor de ϵ escogido. Podemos ver de un simple vistazo que para que la convergencia sea uniforme, todos los gráficos de las funciones $\phi_n(x) = |f(x)-f_n(x)|$ han de estar contenidos en el entorno $[0, \epsilon)$ lo cual ocurrirá si los máximos o supremos de cada función $\phi_n(x)$ –que son números– están contenidos en dicho intervalo. No ocurre lo mismo en el caso de la convergencia no uniforme, donde siempre, cualquiera sea el ϵ que escojamos siempre habrá un valor de n tal que el valor de la función $\phi_n(x)$ en cierto punto x_0 del dominio sobrepasa a ϵ, pero entonces, si ese punto no corresponde al máximo, éste, si existe, también ha de sobrepasar a ϵ. Los anteriores razonamientos "geométricos" nos lleva a la siguiente condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones:

Teorema 1.3.13 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Demostración: Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ en I. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$, luego para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para todo $n > N$ la sucesión $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Por el contrario, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para todo $n > N$, $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, luego, por la propiedad del supremo tenemos que para todo $x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, es decir para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, o sea, $f_n \rightrightarrows f$ en I. ■

Corolario 1.3.14 *Para que una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converja uniformemente a $f(x)$ en I es necesario y suficiente que exista una sucesión $(a_n)_n$ de términos no negativos con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$.*

Demostración: De las condiciones dadas

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} a_n = a_n \to 0,$$

de donde se sigue el resultado. ■

Ejercicio 1.3.15 Probar que la sucesión $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a cero en $[0, q]$, $0 < q < 1$, pero no lo hace en $[0, 1)$.

En efecto, en el primer caso tenemos

$$\sup_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n = a_n, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

mientras que en el segundo

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \qquad \text{que no tiende a 0 cuando } n \to \infty.$$

Teorema 1.3.16 (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme) *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Demostración: Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ en I. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$. Entonces, para $n > N$, y todo $x \in I$, como $n+p \geq N$, tenemos

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x) - f_n(x)|0 &= |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por el contrario, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$, entonces el criterio de Cauchy para las sucesiones nos asegura que existe el límite para cada $x \in I$. Pero además, tomando el límite $p \to \infty$ tenemos que para todo $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$, por tanto $f_n \rightrightarrows f$ en I. ■

La demostración del siguiente resultado se deja como ejercicio al lector.

Proposición 1.3.17 *Si $(f_n(x))_n$ y $(g_n(x))_n$ son dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes en I a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces*

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \textit{en } I, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y

$$h(x) f_n(x) \rightrightarrows h(x) f(x), \qquad \textit{para toda función } h(x) \textit{ acotada en } I.$$

Pasemos a continuación a estudiar lo que ocurre en el caso de las series de funciones. Por analogía con el caso de las series numéricas definiremos las series de funciones

Definición 1.3.18 *Dada una sucesión de funciones $(a_n(x))_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_k(x) + \cdots$$

se denomina serie funcional infinita o serie de funciones. Las funciones

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x),$$

se denominan sumas parciales de la serie de funciones.

Obviamente las sumas parciales $S_n(x)$ son a su vez una sucesión de funciones por tanto podemos definir la convergencia puntual y uniforme de una serie de funciones.

Definición 1.3.19 *Diremos que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *converge a* $S(x)$*, para cierto* $x \in \mathbb{R}$ *si la sucesión de sumas parciales* $(S_n(x))_n$ *tiene límite* $S(x)$*. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

Definición 1.3.20 *Una serie de funciones* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *converge puntualmente en* $I \in \mathbb{X}$ *si para todo* $x \in I$ *y todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \equiv N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$*,* $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ *y lo denotaremos* $S_n \to S$*.*

Definición 1.3.21 *Una serie de funciones* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *converge uniformemente a* $S(x)$ *en* I *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *y para todos los* $x \in I$*,* $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ *y lo denotaremos* $S_n \rightrightarrows S$*.*

Si definimos el resto de la serie

$$r_n(x) \equiv S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x), \tag{1.3.1}$$

entonces, la serie converge uniformemente si y sólo si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, en caso contrario la convergencia no es uniforme. Una prueba sencilla es usar el Teorema 1.3.13 para la sucesión de funciones $S(x) - S_n(x)$. En efecto, puesto que $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, tenemos si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, entonces existe una sucesión $(a_n)_n$ de términos positivos que tiende cero tal que $|r_n(x)| \leq a_n$, luego $|S(x) - S_n(x)| \leq a_n \to 0$. El recíproco es análogo.

Lo anterior nos conduce al siguiente

Teorema 1.3.22 *Si* $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ *en* I*, es decir si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *es uniformemente convergente en* I*, entonces,* $a_n(x)$*, el término general de la serie converge uniformemente a 0 en* I*, es decir* $a_n(x) \rightrightarrows 0$*.*

Demostración: Como $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ en I, el criterio de Cauchy 1.3.16 nos dice que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$ se tiene $|S_{n+1} - S_n| < \epsilon$. Como $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}(x)$, tenemos entonces que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, y para todo $x \in I$, $[a_{n+1}| < \epsilon$, es decir, $a_n \rightrightarrows 0$. ■

Esta condición es necesaria pero no suficiente.

Ejemplo 1.3.23 Estudiar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ en $I = [0, 1)$

Como $x^n \not\rightrightarrows 0$ en $[0, 1)$, entonces la serie no converge uniformemente en $[0, 1)$.

Un criterio muy útil para establecer la convergencia uniforme de una serie de funciones es el siguiente Criterio de Weierstrass:

Teorema 1.3.24 *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|a_n(x)| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en I.*

Demostración: Usando en criterio de comparación de Weierstrass se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ converge para cada $x \in I$. Para probar la convergencia uniforme basta probar que $r_n(x) \rightrightarrows 0$ en I. Como la serie $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ tiende a $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, si $n \to \infty$, o sea, la diferencia $B - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$, tiende a cero si $n \to \infty$. Por tanto,

$$|S_n(x) - S(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

de donde tenemos

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = B - B_n \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

luego $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$. ■

Ejercicio 1.3.25 Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. La serie converge uniformemente en el intervalo $x \in [-q, q]$, para todo $q \in (0, 1)$.

Efectivamente, como $x^n \leq q^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge, entonces el criterio de Weierstrass nos asegura la convergencia.

1.3.3. Propiedades de las sucesiones y series de funciones

En este apartado vamos a estudiar en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. Es decir, responderemos a la pregunta formulada al principio: ¿hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$?

Teorema 1.3.26 *Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, $x_0 \in I$. Si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Demostración: Sea $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$. Como existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, entonces, tomando límites $x \to x_0$ en la desigualdad $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$, tenemos $|l_{n+p} - l_n| \leq \epsilon/3$, luego la sucesión $(l_n)_n$ es de Cauchy y por tanto existe el límite cuando $n \to \infty$ que denotaremos por l. Probemos entonces que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Para ello, usamos que

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|.$$

Comprobemos que en las condiciones del teorema todos los sumandos anteriores se pueden hacer tan pequeños como se quiera. Como $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, entonces, cualquiera sea el $x \in I$, escogiendo $n > N$ tenemos $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon/3$. Ahora bien, como $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, entonces, si escogemos un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, entonces para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f_n(x) - l_n| < \epsilon/3$. Finalmente como $l_n \to l$ si $n \to \infty$, escogiendo n suficientemente grande, digamos mayor que cierto $M \in \mathbb{N}$, $|l_n - l| < \epsilon/3$, luego, para todo $\epsilon > 0$, escogiendo $n > \text{máx}(N, M)$ y $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tenemos $|f(x) - l| < \epsilon$. ■

Como corolario trivial tenemos el siguiente

Teorema 1.3.27 *Sobre la continuidad de una sucesión de funciones Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$. Si f_n es continua en I para todo $n \in \mathbb{N}$, y f_n converge uniformemente a f en I entonces f es continua en I.*

Demostración: Como $f_n(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ y el teorema anterior nos dice que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Como lo anterior es cierto para todo $x_0 \in I$, entonces $f(x)$ es continua en I. ■

El inverso del teorema anterior es falso en general, es decir que si $f_n(x) \to f(x)$ en I, y tanto $f_n(x)$ como $f(x)$ son continuas en I, ello no implica $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Por ejemplo, sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} nx, & 0 \le x \le \frac{\pi}{n} \\ 0, & \frac{\pi}{n} \le x \le \pi \end{cases}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Obviamente tanto $f_n(x)$ como $f(x)$ son continuas en $[0,\pi]$. Ahora bien,

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]} |\operatorname{sen} nx| = 1 \not\to 0,$$

por tanto $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$.

No obstante si imponemos que la sucesión $(f_n(x))_n$ sea monótona sí que se tiene el recíproco.

Teorema 1.3.28 *(Dini) Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones continuas que tienden monótonamente (para cada x) a $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ (cerrado y acotado). Entonces $f(x)$ es continua si y sólo si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[a,b]$.*

La demostración se deja como ejercicio.

Los teoremas anteriores 1.3.26 y 1.3.27 se pueden reescribir para las series de funciones. En efecto si tomamos como sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ la sucesión de sumas parciales de una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.3.29 *Sobre la conmutatividad del límite y la suma para una serie de funciones Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *una serie de funciones uniformemente convergente en* I *tales que* $\lim_{x\to x_0} a_n(x) = a_n$*, entonces*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si además, las funciones $a_n(x)$ *son continuas, entonces la suma* $S(x)$ *de la serie es una función continua.*

Teorema 1.3.30 *Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones Sea* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas en* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *e integrables en* $[a,b]$ *y sea* f_n *uniformemente convergente a* f *en* $[a,b]$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Demostración: Ante todo hay que demostrar que $f(x)$ es integrable. Por sencillez asumiremos que las funciones f_n son continuas entonces por el teorema 1.3.27 se sigue que la función límite f también es continua y por tanto integrable y se puede simplificar la demostración.[6] Como $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[a,b]$, entonces para n suficientemente grande, y para todo $x \in [a,b]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

de donde se sigue que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)}dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx.$$

■

El siguiente ejemplo pone de manifiesto la importancia de las condiciones del teorema que además son **suficientes**.

[6] El caso general, para la integral de Riemann, esta desarrollado al final del capítulo.

Ejemplo 1.3.31 Sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 2na_n x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ -2na_n(x - \frac{1}{n}), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

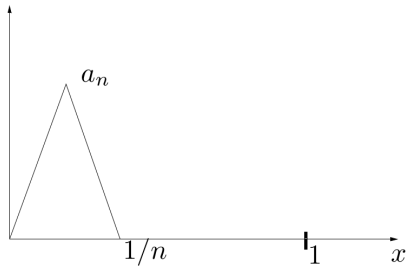


Figura 1.7: La sucesión $(f_n(x))_n$.

Es evidente que las funciones $f_n(x)$ son continuas en $[0,1]$, y por tanto integrables en $[0,1]$ y que cualquiera sea la sucesión $(a_n)_n$ de sus máximos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Como $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = a_n$, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $f_n(x) \rightrightarrows 0$ en $[0,1]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0,$$

lo cual es fácil de comprobar mediante un cálculo directo pues el área de la figura $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \to 0$.

Ahora bien, podemos escoger a_n de forma que $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \to 0$, con $a_n \not\to 0$ –por ejemplo, $a_n = 1$, o incluso $a_n = \sqrt{n} \to \infty$–. En este caso también tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Finalmente, si escogemos a_n de forma que el área $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \not\to 0$, –por ejemplo $a_n = n$ o $a_n = n^2$, además en el primer caso el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ existe y en el segundo no existe (vale $+\infty$)– entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx = 0$.

En el caso de las series tenemos

Teorema 1.3.32 (Integrabilidad de una serie de funciones)
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e integrables en $[a,b]$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en I. Entonces su suma $S(x)$ es integrable y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Teorema 1.3.33 (Derivabilidad de una sucesión de funciones)
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ y derivables en I tales que para cierto $x_0 \in I$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ y además la sucesión de funciones $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a g en I. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función f en I y además $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir la sucesión se puede derivar término a término, i.e.,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Demostración: Definamos la sucesión de funciones $(\varphi_n(x))_n$, definidas por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f_n'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I –pues las funciones $f_n(x)$ son derivables en I por condición del teorema–.

Además $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I. En efecto, aplicando el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| &= \left| \frac{(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}{x - x_0} \right| \\ &= \left| f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi) \right|, \end{aligned}$$

donde $\xi \in (x, x_0)$. Para obtener la última igualdad hemos aplicado el teorema del valor medio de Lagrange a la función $F(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x)$,

es decir, $F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0)$. Además, por definición tenemos $\varphi_{n+p}(x_0) - \varphi_n(x_0) = f'_{n+p}(x_0) - f'_n(x_0)$, luego $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right|$ para todo $x \in I$. Ahora bien, como $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$ en I, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $\left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \epsilon$, entonces

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \epsilon$$

de donde deducimos que $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I. Probemos ahora que $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I. Para ello usamos las identidades $f_{n+p}(x) = f_{n+p}(x_0) + (x - x_0)\varphi_{n+p}(x)$, y $f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)\varphi_n(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = & \ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)[\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)]| \\ \leq & \ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |x - x_0|\,|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| \end{aligned}$$

Ahora bien, como $f_n(x_0) \to f(x_0)$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$, y $p \in \mathbb{N}$, $|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon/2$. Además, $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I, por tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \epsilon/2(b - a)$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ –$N = \text{máx}(N_1, N_2)$– tal que para todo $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$, o sea, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I.

Para culminar nuestra prueba nos resta demostrar que la función límite $f(x)$ es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir, que $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

Ante todo, notemos que puesto que $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces la condición
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ se cumple para cualquiera sea $x_0 \in I$ y no sólo para el x_0 prefijado en el enunciado del teorema. Por tanto, si probamos que $f(x)$ es derivable en cierto $\zeta \in I$ –en particular x_0– y que $f'_n(\zeta) \to f'(\zeta) = g(\zeta)$, entonces $f'(x) = g(x)$ en todo I. Escojamos por tanto un ζ cualquiera y redefinamos las funciones

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta}, & x \neq \zeta \\ f'_n(\zeta), & x = \zeta \end{cases}$$

Como antes, las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I y $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I. Luego

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\zeta)}{x - \zeta} = \frac{f(x) - f(\zeta)}{x - \zeta}.$$

Lo anterior junto con el hecho de que todas las funciones $\varphi_n(x)$ son continuas en I, y que $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ en I, nos permiten utilizar el teorema sobre la continuidad de una sucesión de funciones 1.3.27 para afirmar que $\varphi(x)$ es continua en I así como el teorema sobre el límite 1.3.26 que nos da

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\zeta}\frac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta} &= \lim_{x\to\zeta}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(\zeta)}{x-\zeta}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\zeta}\varphi_n(x)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\zeta}\frac{f_n(x)-f_n(\zeta)}{x-\zeta}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\zeta).\end{aligned}$$

Esta igualdad nos asegura que existe la derivada de $f(x)$ para todo $x \in I$, y además que

$$f'(\zeta) = \lim_{x\to\zeta}\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\zeta), \qquad \forall \zeta \in I,$$

que es que se quería demostrar. ■

Del teorema anterior se sigue *fácilmente* el siguiente teorema para las series de funciones:

Teorema 1.3.34 *Sea* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *una serie de funciones que converge al menos en un punto* $x_0 \in I$*, cuyos términos* $a_n(x)$ *son derivables en todo* I*, y cuya serie de las derivadas de* $a_n(x)$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *converge uniformemente en* I*. Entonces la serie* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge uniformemente en* I *y además se cumple que*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'(x)\right),$$

o sea, es derivable término a término.

Ejemplo 1.3.35 Consideremos la serie $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, que converge en el intervalo $[-R, R]$, cualquiera sea $R > 0$. Obviamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge uniformemente en $[-R, R]$. Entonces,

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

Es decir, $(e^x)' = e^x$.

Ejemplo 1.3.36 Sea la función

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada, definida por,

$$\psi'(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x} + \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto el cero. Numeremos todos los puntos racionales del intervalo $[0, 1]$ mediante la sucesión $(x_n)_n$, lo cual es posible pues $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable. Definamos la sucesión $a_n(x) = \frac{1}{n^2}\psi(x - x_n)$. Entonces, $a_n'(x) = \frac{1}{n^2}\psi'(x - x_n)$ es discontinua en un único punto $x = x_n$, además

$$|a_n(x)| \leq \frac{|x - x_n|^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad |a_n'(x)| \leq \frac{1 + 2|x - x_n|}{n^2} \leq \frac{3}{n^2},$$

ambas series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ convergen uniformemente en $[0, 1]$ pues ambas se pueden mayorar por la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$. Por tanto el teorema 1.3.34 nos dice que

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'(x)),$$

es decir, que la función $S(x)$ es derivable en todo $[0, 1]$ y su derivada es discontinua en cada uno de los puntos racionales del intervalo.

Anexo: Demostración del teorema 1.3.30 para funciones integrables

En el caso que las funciones f_n de la sucesión de funciones sean integrables Riemann podemos hacer lo siguiente: Como $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[a,b]$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todo $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$. Por tanto, para todo $n > N$ tendremos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = & \ |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ \leq & \ |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \end{aligned}$$

Obviamente, el primer y último sumando se pueden hacer más pequeños que $\frac{\epsilon}{4(b-a)}$ pues $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[a,b]$, i.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \qquad \forall x, y \in [a,b].$$

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en intervalos más pequeños $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$ (una partición de $[a,b]$). Usando la última desigualdad tenemos

$$\sup_{x,y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x,y \in \Delta_i} |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in \Delta_i} |f_n(x) - f_n(y)| \Delta x_i + \frac{\epsilon}{2}.$$

Pero $f_n(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, luego, por el criterio de Riemann, existe una partición P_n de $[a,b]$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in \Delta_i} |f_n(x) - f_n(y)| \Delta x_i < \epsilon/2$, por tanto, para dicha partición $S_f(P_n) - s_f(P_n) < \epsilon$, luego $f(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. El resto de la prueba es análogo.

1.4. Sobre conjuntos infinitos

En este sección recordaremos algunas cuestiones sobre conjuntos infinitos haciendo hincapié en el caso de los números reales.

1.4.1. Conjuntos numerables

Sean dos conjuntos A y B cualesquiera. Por ejemplo, digamos que A es el conjunto de los números primos menores que un número dado (digamos 10), B el de los vértices de un dodecaedro (12 lados). A y B son finitos, es decir están constituidos por un número finito de elementos. Luego, una forma natural para compararlos puede ser sencillamente usando el número de sus elementos. Obviamente A tiene seis elementos, $1, 2, 3, 5, 7$ y B doce, así que B será más grande que A. Sea ahora C el conjunto de los lados de un hexágono. Entonces C y A tienen el mismo número de elementos de forma que podemos hacer corresponder a cada uno de los elementos de C el correspondiente elemento de A y viceversa. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y C. Obviamente tal correspondencia es imposible de encontrar entre los elementos de A y B o B y C (¿por qué?).

¿Qué ocurre si ahora A Y B tienen infinitos elementos, es decir son conjuntos infinitos? Ejemplo de tales conjuntos son conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.

En este caso el primer método de comparar conjuntos no nos sirve pues no podemos "contar" los elementos ya que éstos son infinitos así que sólo nos queda el segundo de ellos: intentar encontrar una correspondencia biunívoca entre conjuntos.

En adelante denotaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ al conjunto de los números naturales que es el conjunto infinito más sencillo.

Definición 1.4.1 *Un conjunto A es numerable si*

1. *A es vacío.*
2. *A tiene un número finito de elementos.*
3. *Si A tiene un número infinito de elementos, estos se pueden poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$.*

Veamos algunos ejemplos.

Por ejemplo, P, el conjunto de todos los números pares es numerable. En efecto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ existe un único $p \in P$ tal que $p = 2n$ y viceversa, cualquiera sea $p \in P$, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p/2$,

es decir existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, o lo que es lo mismo *hay tantos números pares como naturales*.

Existe una forma muy sencilla de probar lo anterior. Escribamos todos los números naturales en una tabla

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$

y eliminemos todos los impares y "contamos" los números resultantes. Así tenemos

$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cdots$	$\cancel{2n-1}$	$2n$	$\cancel{2n+1}$	$2n+2$	$\cdots$
	1		2		3	$\cdots$		n		$n+1$	$\cdots$

es decir, P es numerable, los números pares se pueden "contar", existe una correspondencia biyectiva entre los números pares y los naturales.

De forma similar se puede proceder para probar que el conjunto de los números impares I es numerable. Lo mismo ocurre con los enteros

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$

Veamos un ejemplo más complicado. Sea A el conjunto de puntos del plano de la forma (n, m), $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces A es numerable.

Para comprobarlo vamos a "*contar*" todos los pares anteriores, es decir vamos a construir una función biyectiva que a cada par le haga corresponder un único valor de $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos siguiendo el siguiente esquema: ordenamos los pares por filas según la suma $n + m = 2, 3, 4, \ldots$ y cada fila la ordenamos de menor a mayor según el primer valor n y así tenemos una correspondencia biunívoca tal y como se ve en la figura 1.4.1

De forma análoga se puede probar la siguiente

Proposición 1.4.2 *El conjunto $B = \{(p, q)\,;\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ es numerable, es decir que se puede construir una "ordenación" de B similar a la del ejemplo anterior.*

Una consecuencia de la proposición anterior es la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. En efecto, sea un número r racional cualquiera, $r \in \mathbb{Q}$. Entonces r se puede escribir como $r = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Así que a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ que es un subconjunto de los pares B definidos en la proposición 1.4.2 (por qué?), así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

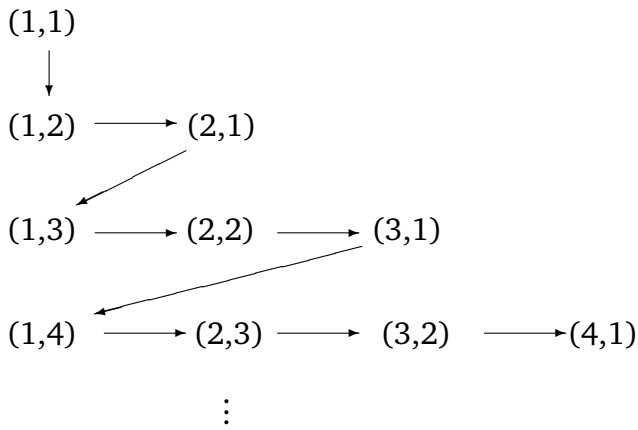


Figura 1.8: Contando el conjunto $A = \{(n, m), ; n, m \in \mathbb{N}\}$.

1.4.2. Propiedades de los conjuntos numerables

Veamos algunas propiedades de los conjuntos numerables. La siguiente proposición es sencilla de probar:

Proposición 1.4.3 *1. Si A es un conjunto numerable y B es un subconjunto de A, entonces B es numerable.*

2. La unión de un conjunto numerable y uno finito es numerable.

3. La unión de dos conjuntos numerables es numerable, y por tanto la unión de un número finito de conjuntos numerables es numerable.

4. La unión de un número numerable de conjuntos numerables es numerable.

Para probar el último apartado podemos escribir cada uno de los conjuntos numerables de la forma $A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots a_{1,n}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, \dots a_{2,n}, \dots\}$,..., $A_m = \{a_{m,1}, a_{m,2}, \dots a_{m,n}, \dots\}$, y escribirlos como pares (m, n), $n, m \in \mathbb{N}$. Dichos pares son los representados en la figura 1.4.1 y, como ya vimos, son numerables. Luego tenemos 4. Está claro que 2 y 3 son casos particulares de 4. Para probar 1, basta usar la reducción al absurdo.

Veamos como usando los apartados anteriores podemos probar los ejercicios que antes hemos resuelto.

Sea $\mathbb{N}^-$ el conjunto de los números enteros negativos y sea $\mathbb{Z}_k$, $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos de los números de la forma n/k, con $n \in \mathbb{Z}$, es decir $\mathbb{Z}_k = \{n/k\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Obviamente $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, pero tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{N}^-$ son numerables, así que $\mathbb{Z}$ es numerable. Además, por construcción $\mathbb{Z}_k$ es numerable. Además, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{Z}_k \cup \cdots$, o sea $\mathbb{Q}$ es la unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Definamos ahora el conjunto "producto directo" de dos conjuntos. Sea A y B dos conjuntos cualesquiera. Definiremos el "producto directo" de A y B que denotaremos por $A \otimes B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Está claro que si A y B son numerables el conjunto $A \otimes B$ es numerable. Para ello basta usar de forma inteligente las proposiciones 1.4.2 y 1.4.3.

Como consecuencia de lo anterior tenemos otra prueba de que $\mathbb{Q}$ es numerable pues, como hemos visto, a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, p, q primos entre si, o sea, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{N}$.

Usando la proposición 1.4.3 se puede comprobar que el el conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo más n con coeficientes $a_0, \ldots a_n$ racionales:

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}\},$$

es numerable y, por tanto, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales

$$\mathbb{P} = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

también lo es pues $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \cdots$. Para esto último podemos usar la inducción sobre n y que $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n \cup \{a_{n+1} x^{n+1}\,;\, a_{n+1} \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 1.4.4 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que x es solución de la ecuación algebraica*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n = 0, \quad , n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}.$$

Entonces se dice que x es un número algebraico. Si x no es solución de ninguna ecuación algebraica, entonces se dice trascendente.

Por ejemplo, 2 es un número algebraico ($x - 2 = 0$), $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico pues es solución de $x^2 - 2 = 0$. Se puede probar que e u π son trascendentes.

Nótese que, a diferencia de los números irracionales, ningún número racional puede ser trascendente (¿por qué?). Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de todos los números algebraicos y $\mathbb{T}$ el de los trascendentes. Dado que un polinomio de grado n solo puede tener n raíces y que el conjunto $\mathbb{P}$ es numerable se sigue que el conjunto $\mathbb{A}$ es numerable.

Ejemplo 1.4.5 *Prueba que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable A es numerable.*

Para comprobarlo usaremos la Proposición 1.4.3. Está claro que el conjunto A_1 de todos los subconjuntos de A con un solo elemento es numerable. En conjunto A_2 de todos los subconjuntos de A con dos elementos es numerable. En general, el conjunto A_n de todos los subconjuntos de A con $n \in \mathbb{N}$ elementos es numerable. De esta forma obtenemos un conjunto numerable $(A_1, A_2, \dots)$ de conjuntos numerables. ■

Así, por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos finitos de números racionales es numerable. Basta identificar $A = \mathbb{Q}$, A_1 con el conjuntos de todos lo racionales q, A_2 con el conjunto de todos los pares de racionales (p, q), y así sucesivamente.

Definición 1.4.6 *Dos conjuntos A y B se denominan equivalentes y se denota por $A \sim B$ si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos. En este caso el "número" de sus elementos es el mismo lo que se suele denotar por* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$[7].

En fácil comprobar entonces que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ (¿por qué?) y que si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

Por ejemplo, según hemos visto antes $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{A}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{A}$, etc.

Es evidente que el conjunto de los números racionales que pertenecen al conjunto $[0, 1]$ es numerable pues son un subconjunto de $\mathbb{Q}$. La pregunta

[7]En realidad el concepto de cardinal o potencia de un conjunto es ligeramente más complicado que el número de sus elementos, pero para nuestros objetivos esta definición es suficiente.

es ¿será también numerable el conjunto de los irracionales contenidos en $[0,1]$?, o, equivalentemente, ¿será numerable $[0,1]$?

Vamos a intentar responder a esta pregunta.

Supongamos que $[0,1] \sim \mathbb{N}$. Entonces ha de existir una sucesión de números reales $(x_n)_n$ tal que cualquiera sea $x \in [0,1]$, x coincidirá con al menos un miembro de la sucesión $(x_n)_n$ (en caso contrario $[0,1]$ no sería numerable, ¿por qué?).

Hagamos la siguiente construcción: sea $I_0 = [0,1]$. Escojamos un intervalo cerrado $I_1 \subset I_0$ que no contenga a x_1, o sea, $x_1 \notin I_1$. A continuación escojamos un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$ que no contenga a x_2, o sea, $x_2 \notin I_2$, y así sucesivamente. Entonces tenemos una sucesión de intervalos (cerrados) encajados tal que $I_{n+1} \subset I_n$ pero $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Entonces, existe al menos un $x \in I_n$ para todo $n \geq 0$. ¿Puede ser eso posible? Justifica tu respuesta.

De lo anterior se deduce el Teorema de Cantor

Teorema 1.4.7 *$\mathbb{R}$ no es numerable. (*$\operatorname{card} \mathbb{R} > \operatorname{card} \mathbb{N}$*)*

Como corolario tenemos

Corolario 1.4.8

1. *$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$, es decir, existe $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto de los números irracionales, y además $\mathbb{I}$ no es numerable.*
2. *$\mathbb{A} \neq \mathbb{I}$, existe el conjunto de los números trascendentes $\mathbb{T}$, y $\mathbb{T}$ no es numerable.*

Resulta que la mayoría de los números irracionales que conocemos son algebraicos, por ejemplo $\sqrt[n]{k}$ si $k \neq l^n$, $l \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (prueba que este número es irracional algebraico), etc. Por el contrario se conocen pocos números trascendentes: π, e. No obstante resulta que éstos son la mayoría de todos los números ya que los números algebraicos (que incluyen, como hemos visto a los racionales) es un conjunto numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es y obviamente $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$.

Automáticamente surge la pregunta. ¿Existirá algún conjunto infinito intermedio entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$?, es decir, que tenga “más” elementos que $\mathbb{N}$ pero “menos” que $\mathbb{R}$?

Georg Cantor fue quien desarrolló la teoría moderna de conjuntos infinitos, a él debemos la notación y algunos de los resultados que hemos descrito aquí. Precisamente fue Cantor quien conjeturó que no existía dicho conjunto intermedio (hipótesis del continuo). Este fue el primero de los 23 famosos problemas que formuló Hilbert en 1900. La respuesta a este problema fue totalmente inesperada. Por un lado Kurt Gödel probó en 1940 que usando los axiomas de la teoría de conjuntos era imposible desmentir la hipótesis de Cantor. La respuesta definitiva la dio Paul Cohen en 1963 cuando demostró que bajo el mismo sistema de axiomas de la teoría de conjuntos era imposible probar la conjetura, o sea, la hipótesis del continuo se puede aceptar o no y eso no lleva a ninguna contradicción lógica dentro de la teoría de conjuntos.

Capítulo 2

¿Qué es el análisis funcional?

¿Cómo comenzar el curso de Análisis funcional? Sin duda una posibilidad es con un poco de historia, pero para eso se puede consultar el muy completo artículo de Berta Gamboa de Buen, *Historia del Análisis Funcional* publicado en la revista *Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, volumen **28** (1999) páginas 17-39[1]. Como bien cuenta su autora, el análisis funcional surge y se desarrolla en el siglo XX generado por la evolución de análisis matemático clásico, la física-matemática, las nuevas ideas del álgebra y la geometría y muy ligado a la topología. En otras palabras de alguna forma aúna las principales áreas de la matemática. Nosotros, sin embargo, vamos a proceder de otra forma. Vamos a seguir la idea de Schechter en [9] y comenzar con un ejemplo relativamente sencillo que nos conducirá a redescubrir varios de los conceptos fundamentales del análisis clásico así como algunos otros del propio análisis funcional.

2.1. Una ecuación diferencial lineal

Uno de los problemas típicos de un curso de ecuaciones diferenciales es la resolución del siguiente problema de valores iniciales

$$f''(x) + f(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1, \; f'(a) = 0, \tag{2.1.1}$$

donde por f' denotamos la derivada de f respecto a x. Además, por simplicidad asumiremos que g es una función continua en $[a, b]$ y que f, la

[1] https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/28

solución buscada, es una función dos veces diferenciable con segunda derivada continua. Así, usaremos la notación $g \in C([a,b])$ y $f \in C^{(2)}([a,b])$, para denotar al conjuntos de funciones continuas en $[a,b]$ y las que son dos veces diferenciable con segunda derivada continua en $[a,b]$, respectivamente.

Se puede comprobar que la (una) solución de dicho problema (2.1.1) viene dada por la expresión

$$f(x) = \cos(x-a) + \int_a^x \sin(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{2.1.2}$$

Comprobemos que, efectivamente, la función f anterior es solución de la ecuación (2.1.1) con los valores iniciales dados. Lo primero que es *obvio* es que $f(a) = 1$, pues la integral en (2.1.2) es cero. Calculemos ahora $f'(x)$. El primer sumando no tiene problemas, pero el segundo es algo más complicado pues la variable x aparece tanto en el límite de integración, como en la función a integrar. Este problema es un problema típico de la teoría de integrales dependientes de un parámetro. Así pues, para calcular la derivada de nuestra función f conviene recordar el siguiente teorema:[2]

Teorema: *Sea $h(t,x)$ una función continua en $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$. Entonces la función $H(x) = \int_a^b h(t,x)dt$ es continua y diferenciable en $[c,d]$ y*

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt.$$

Idea de la demostración: Para probar la continuidad se puede usar el Teorema de Heine 1.3.5 para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado D que establece que si f es continua en D, entonces f es uniformemente continua en D, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall (t,x),(t',x') \in D$, que satisfacen $\sqrt{(t-t')^2 + (x-x')^2} < \delta$, se tiene $|h(t,x) - h(t',x')| < \epsilon$. Entonces, para todos x, x' tales que $|x - x'| < \delta$,

$$|H(x) - H(x')| \leq \int_a^b |h(t,x) - h(t,x')|dt \leq \epsilon(b-a),$$

i.e., $H(x) \to H(x')$ cuando $x \to x'$. Para probar la diferenciabilidad basta mostrar que para todo $x_0 \in [c,d]$

$$\lim_{h \to 0} H(x_0 + h) - H(x_0) - H'(x_0)h = o(h),$$

[2]Ver, por ejemplo, la sección §17.1.13 de [13].

donde $o(h)$ es tal que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$, lo que se puede probar de forma similar a la continuidad por lo que lo dejamos como ejercicio al lector. ■

Sea $\alpha(x)$ una función diferenciable en $[c, d]$ cuya imagen esté contenida en $[a, b]$ y sea la función $\Phi(\alpha, x) = \int_a^\alpha h(t, x)dt$, $\alpha \in [a, b]$, $x \in [c, d]$. Usando el teorema fundamental del cálculo así como el teorema anterior tenemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, x) = \int_a^\alpha \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha, x) = h(\alpha, x).$$

Dado que ambas derivadas parciales son continuas, entonces $\Phi(\alpha, x)$ es diferenciable en $\alpha \in [a, b]$, $x \in [c, d]$. Definamos ahora la función compuesta $\Psi(x) = \Phi(\alpha(x), x)$, $x \in [c, d]$. Dicha función es diferenciable en $x \in [c, d]$ así que usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha'(x)h(\alpha(x), x) + \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt.$$

Aplicando la fórmula anterior a nuestra función f definida en (2.1.2), donde en el segundo sumando $\alpha(x) = x$ y $h(t, x) = \sin(x - t)g(t)$, obtenemos

$$f'(x) = -\sin(x - a) + \int_a^x \cos(x - t)g(t)dt, \qquad x \in [a, b], \tag{2.1.3}$$

y

$$f''(x) = -\cos(x - a) + g(x) - \int_a^x \sin(x - t)g(t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{2.1.4}$$

Nótese que esta última expresión se puede escribir, usando (2.1.2), como

$$f''(x) = -f(x) + g(x) \quad \Rightarrow f''(x) + f(x) = g(x), \qquad x \in [a, b].$$

Además, de (2.1.3) se tiene que $f'(a) = 0$ y, por tanto, dado que $f(a) = 1$ como ya vimos, la función f definida por (2.1.2) es efectivamente la solución del problema (2.1.1).

El método anterior nos permite, al menos formalmente, plantearnos el siguiente problema: resolver el problema de valores iniciales

$$f''(x) + f(x) = \sigma(x)f(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1, \; f'(a) = 0. \tag{2.1.5}$$

Está claro que la *solución* será

$$f(x) = \cos(x-a) + \int_a^x \sin(x-t)\sigma(t)f(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{2.1.6}$$

Lo anterior define una ecuación integral. Escribamos la ecuación anterior de una forma más conveniente.

Sea $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$ y sea $k(x,t)$ una función continua en D. Definamos el *operador* K, $K : C([a,b]) \mapsto C([a,b])$

$$Kf := K(f(x)) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt. \tag{2.1.7}$$

Entonces (2.1.6) la podemos reescribir como

$$f = u + Kf, \quad u = \cos(x-a), \quad k(x,t) = \sin(x-t)\sigma(t).$$

¿Cómo resolver esta ecuación?

2.2. La ecuación integral de Volterra

Vamos a intentar resolver la ecuación

$$f(x) = u(x) + Kf(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.2.1}$$

donde $u, f \in C([a,b])$ y K es el operador de Volterra definido en (2.1.7).

Nótese que K trasforma funciones continuas en funciones continuas. Una forma natural de resolverla es siguiendo el conocido método iterativo de Picard:

Elegimos una función $f_0 \in C([a,b])$ cualquiera y la sustituimos en el miembro derecho de (2.2.1) lo que nos dará, en principio, una nueva función continua f_1

$$f_1(x) = u(x) + Kf_0(x), \quad x \in [a,b]. \tag{2.2.2}$$

Es improbable que $f_1 = f_0$, lo que nos daría la solución buscada, de forma que sustituimos f_1 en el miembro derecho de (2.2.1)

$$f_2(x) = u(x) + Kf_1(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.2.3}$$

y así, sucesivamente, obtenemos una sucesión de ecuaciones

$$f_n(x) = u(x) + Kf_{n-1}(x), \quad x \in [a,b], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.2.4}$$

Como ya hemos dicho, es improbable que para algún n, $f_n = f_{n-1}$, así que la pregunta natural es ¿cuán cerca está f_n de f si n es muy grande? y ¿qué significa que f_n esté cerca de f, o que $f_n \to f$ en $[a,b]$ cuando $n \to \infty$?

Está claro que esta pregunta corresponde a saber cuando una sucesión de funciones continuas f_n converge a alguna función f, y para que f sea solución de (2.2.1) necesitamos además que f sea continua.

Por otro lado, nótese que si $f_n \to f$, otra pregunta natural es si $Kf_n \to Kf$. Si esto fuera así, entonces, tomando límites cuando $n \to \infty$ en (2.2.4) obtendríamos (2.2.1) y por tanto resolveríamos la ecuación. Intentemos formalizar lo anterior de una forma rigurosa.

Como las f_n son continuas y nos interesa que la función límite también lo sea, entonces podemos usar el concepto de convergencia uniforme de funciones (véase la sección 1.3.2). Allí vimos que una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a f en $[a,b]$ si

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Lo anterior nos da una idea de como definir la *distancia* ρ entre dos funciones f y g. Así, dada dos funciones $f, g \in C([a,b])$ definiremos la distancia $\rho(f,g)$ mediante la expresión

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

De esta definición se sigue que $\forall f, g, h \in C([a,b])$,

1. $\rho(f,g) \geq 0$ y $\rho(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$,
2. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$, y
3. $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$.

En muchas ocasiones se dice que la función ρ que satisface las propiedades anteriores define una *métrica*. Los conjuntos donde se puede definir una métrica se suelen denominar espacios métricos (ver la definición 3.1.1).

Asociada a la definición de distancia se puede definir el *tamaño* o la *norma* de una función. Así, dada una función $f \in C([a,b])$ definiremos la norma de f, $\|f\|$ al número

$$\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{2.2.5}$$

Es fácil comprobar que la *norma* anterior satisface las siguientes propiedades: $\forall f, g \in C([a,b])$,

1. $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$,
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Los conjuntos donde se puede definir una norma se denominan espacios normados (ver la definición 4.2.1).

Lo siguiente que queremos hacer notar es que el espacio de las funciones continuas $C([a,b])$ satisface una serie de interesantes propiedades que pasamos a enumerar:

1. Para todos $f, g \in C([a,b])$, la suma, $h = f + g \in C([a,b])$ y para todos $f, g, h \in C([a,b])$ se cumple que:
   a) $f + g = g + f$
   b) $(f + g) + h = f + (g + h)$
   c) $f + \emptyset = \emptyset + f = f$, donde $\emptyset$ denota a la función $\emptyset : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $\emptyset(x) = 0$.
   d) Cualquiera sea f existe una función $(-f)$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \emptyset$.
2. Para todo $f \in C([a,b])$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, $g = \alpha \cdot f \in C([a,b])$, y para todos $f, g \in C([a,b])$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:
   a) $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$,
   b) $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$,
   c) $\alpha \cdot (\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f$
   d) $1 \cdot f = f$

Los conjuntos que satisfacen las propiedades anteriores se denominan espacios vectoriales (ver la definición 4.1.1).

De la propia definición del operador K (2.1.7), usando las propiedades de la integral, tenemos que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C([a,b])$,

$$K(\alpha f + \beta g) = \alpha K f + \beta K g. \tag{2.2.6}$$

Si un operador que cumple con lo anterior se dice que es un operador *lineal*.

Además, para toda función $f \in C([a,b])$ se tiene, usando (2.1.7),

$$\begin{aligned} |Kf| &\leq \int_a^x |k(x,t)||f(t)|dt \leq \int_a^x \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|dt \\ &\leq \kappa\|f\|(x-a) \leq \kappa\|f\|(b-a) = c\|f\|, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

donde $\kappa = \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|$ y $c = \kappa(b-a)$. Es decir, para toda $f \in C([a,b])$, existe un $c \geq 0$ tal que

$$\|Kf\| = \sup_{t\in[a,b]} |Kf| \leq c\|f\|. \tag{2.2.8}$$

Los operadores que cumplen con dicha propiedad se denominan operadores acotados.

Armados de todo lo anterior estamos en condiciones de responder a nuestra pregunta sobre si la ecuación (2.2.1) tiene solución y si esta la podemos encontrar mediante el límite de la sucesión de funciones f_n definidas por (2.2.4).

Para ello vamos a estimar el valor de $\|f_n - f_m\|$ donde la norma es la definida en (2.2.5). Si resulta que su valor es tan pequeño como se quiera cuando n, m son lo suficientemente grandes entonces f_n converge uniformemente a una función continua f en $[a,b]$.

Usando (2.2.3) tenemos, usando (2.2.2)

$$f_2 = u + Kf_1 = u + K(u + Kf_0) = u + Ku + K(Kf_0) = u + Ku + K^2 f_0,$$

donde K^2 es el operador que se obtiene al componer, o multiplicar, K por si mismo: $K^2 : C([a,b]) \mapsto C([a,b])$, $K^2 f = (K \circ K)(f) = K(Kf)$. En general, definiremos el operador K^n inductivamente, i.e., $K^n = K \circ K^{n-1}$.

Continuando este proceso podemos comprobar por inducción que

$$f_n = u + Ku + K^2u + \cdots + K^{n-1}u + K^n f_0,$$

por tanto, para todos $m < n$ obtenemos

$$f_n - f_m = K^m u + \cdots + K^{n-1}u + K^n f_0 - K^m f_0.$$

Entonces, usando las propiedades de la norma (concretamente la tercera)

$$\|f_n - f_m\| \leq \|K^m u\| + \cdots + \|K^{n-1}u\| + \|K^n f_0\| + \|K^m f_0\|. \tag{2.2.9}$$

Vamos a acotar cada uno de los sumandos. Nótese que estos se pueden escribir de la forma $\|K^n h\|$, $h \in C([a,b])$, $n = 1, 2, \ldots$.

Para $n = 1$ ya hemos visto en (2.2.8) que $\|Kh\| \leq c\|h\|$. Entonces,

$$\|K^2 h\| = \|K(Kh)\| \leq c\|Kh\| \leq c^2\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \leq c^n\|h\|. \tag{2.2.10}$$

De esta forma podríamos obtener una cota superior de la suma del miembro derecho de (2.2.9), pero dicha cota solo es útil si $c < 1$ pues en caso contrario cualquiera de los sumandos tendería a infinito cuando $n \to \infty$.

Vamos a *afinar* nuestra cota. Como vimos en (2.2.7) tenemos que

$$|Kh| \leq \kappa\|h\|(x-a),$$

luego

$$\begin{aligned}
|K^2 h| = |K(Kh)| &\leq \int_a^x |k(x,t)||Kh|dt \leq \kappa \int_a^x |Kh|dt \\
&\leq \kappa^2\|h\| \int_a^x (x-a)dt = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{2}\|h\|, \\
|K^3 h| = |K(K^2 h)| &\leq \int_a^x |k(x,t)||K^2 h|dt \leq \kappa \int_a^x |K^2 h|dt \\
&\leq \frac{\kappa^3\|h\|}{2} \int_a^x (x-a)^2 dt = \frac{\kappa^3(x-a)^3}{3!}\|h\|.
\end{aligned}$$

y, así, por inducción, obtenemos

$$|K^n h| \leq \frac{\kappa^n(x-a)^n}{n!}\|h\|,$$

que tomando supremos en $x \in [a, b]$ nos conduce a una cota mucho más fina que la obtenida en (2.2.10)

$$\|K^n h\| \leq \frac{\kappa^n (b-a)^n}{n!} \|h\|, \tag{2.2.11}$$

Por tanto, podemos reescribir (2.2.9)m usando $\zeta = (b-a)\kappa$, como

$$\|f_n - f_m\| \leq \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \right) \|u\| + \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!} \right) \|f_0\|. \tag{2.2.12}$$

Por un lado está claro que $\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Por el otro,

$$\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

pues es la cola de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} = e^{\zeta}$. De esta forma hemos probado que f_n es uniformemente convergente y que límite f es una función continua en $[a, b]$.

Probemos ahora que $Kf_n \to Kf$ si $f_n \to f$. Para ello, usaremos la linealidad y la acotación de K (ver (2.2.6) y (2.2.8), respectivamente)), que nos conduce a

$$\|Kf_n - Kf\| = \|K(f_n - f)\| \leq c\|f_n - f\| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por tanto, si ahora tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en (2.2.4), obtenemos (2.2.1) lo que prueba que la sucesión f_n construida mediante el método iterativo de Picard aquí descrito tiende a la solución de la ecuación integral de Volterra (2.2.1).

Hemos encontrado una solución de (2.2.1) pero ¿es única? Probemos que si. Supongamos que hay dos funciones continuas en $C([a, b])$, f y g, con $f \neq g$ tales que $f = u + Kf$ y $g = u + Kg$. Restando ambas tenemos $f - g = K(f - g)$. Sea $h = f - g$. Entonces

$$h = Kh \quad \Rightarrow \quad h = K(Kh) = K^2 h = K^2(Kh) = K^3 h = \cdots = K^n h,$$

y, por tanto, $\|h\| = \|K^n h\|$. Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior y usamos (2.2.11) obtenemos $\|K^n h\| \to 0$ de donde se deduce que $\|h\| = 0$, i.e. $f = g$, lo cual es una contradicción.

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C([a,b])$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*

2. En $C([a,b])$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*

3. El operador K es un operador lineal y acotado.

4. Toda sucesión $f_n \in C([a,b])$ tal que $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (es decir una sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C([a,b])$ cuando $n \to \infty$. Esta propiedad se conoce como propiedad de completitud del espacio (ver Definición 3.5.12).

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas? ¿Qué otras propiedades importantes son necesarias para lidiar con estos espacios? ¿Con qué otros tipos de operadores podemos encontrarnos en la práctica?

Nuestro objetivo será estudiar algunas de las propiedades de los espacios *funcionales* así como de cierta clase de operadores que generalizan el operador de Volterra discutido en este capítulo.

Capítulo 3

Espacios métricos

Los espacios métricos son la *extensión natural* de los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La idea consiste en, dado un conjunto cualquiera de elementos, poder medir la distancia entre ellos.

3.1. Definición de espacio métrico

Definición 3.1.1 *Un espacio métrico es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

En adelante diremos simplemente que $\mathbb{X}$ es el espacio y ρ su métrica.

Veamos varios ejemplos representativos de espacios métricos. Nótese que muchos de ellos están definidos sobre el mismo conjunto $\mathbb{X}$ pero con diferentes funciones ρ, i.e., la métrica cambia.

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $\mathbb{X}$ *un conjunto arbitrario y definamos la métrica* trivial $\rho(x, y) = 1$ *si* $x \neq y$ *y* $\rho(x, y) = 0$ *si* $x = y$. *Este espacio se suele denominar espacio métrico discreto.*

Ejemplo 3.1.3 *Si $\mathbb{X}$ es el conjunto de todos los números reales y $\rho(x,y) = |x-y|$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x, obtenemos un espacio métrico normalmente denotado por $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.1.4 *El espacio métrico $\mathbb{C}$ es el espacio definido por el par $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ y la métrica $\rho(x,y) = |x-y|$, donde $|x|$ es el módulo de x.*

Ejemplo 3.1.5 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_2$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Ejemplo 3.1.6 *Si $\mathbb{X}$, es el espacio de las n-tuplas reales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pero con la métrica*

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

obtenemos otro espacio métrico (distinto al anterior) que denotaremos por $\mathbb{R}^n_1$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Una generalización de los dos ejemplos anteriores es el siguiente:

Ejemplo 3.1.7 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_p$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Ejemplo 3.1.8 $\mathbb{R}^n_\infty$*. Es decir, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pero con la métrica:*

$$\rho(x,y) = \operatorname*{máx}_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|.$$

Ejemplo 3.1.9 *Sea $\mathbb{X} = C([a,b])$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a,b]$. Definamos la función*

$$\rho(f,g) = \operatorname*{máx}_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

El par obtenido $C_\infty([a,b])$ es un espacio métrico.

Ejemplo 3.1.10 *Sea nuevamente $\mathbb{X} = C([a,b])$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a,b]$ y definamos la métrica*

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

El par obtenido $C_p([a,b]$ es un espacio métrico. Como caso particular (de especial relevancia) tenemos el caso $p = 2$, i.e., $\mathbb{X} = C([a,b])$ y ρ es la función

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2}.$$

Ejemplo 3.1.11 *Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones numéricas reales (o complejas) $x = (x_n)_n$ acotadas y definimos la métrica*

$$\rho(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

El espacio obtenido es un espacio métrico que denotaremos por ℓ^∞.

Ejemplo 3.1.12 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales (o complejas) $x = (x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < +\infty$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por ℓ^p.

Un caso particular de los espacios ℓ^p es cuando $p = 2$, i.e., el espacio métrico ℓ^2 usualmente asociado al nombre de Hilbert. O sea, $\ell^2 = (\mathbb{X}, \rho)$ donde $\mathbb{X}$ es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < +\infty$ con la métrica

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^2}.$$

Ejemplo 3.1.13 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ y definamos la métrica por*

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Este espacio también es un espacio métrico.

Ejemplo 3.1.14 *Sea el espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$. Entonces si definimos sobre $\mathbb{X}$ una nueva métrica $\sigma(x,y)$*

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)},$$

obtenemos un nuevo espacio métrico $(\mathbb{X}, \sigma)$.

A continuación probaremos que los espacios considerados en los ejemplos anteriores son, en efecto, espacios métricos.

Ante todo notemos que en todos los casos es fácil comprobar los axiomas 1 y 2 de la definición (3.1.1). Probemos la desigualdad triangular. Para los ejemplos 3.1.2-3.1.4, 3.1.8, 3.1.9 y 3.1.11 las pruebas son sencillas y se basan en la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) menos en el ejemplo 3.1.2 donde es trivial. Nótese además que en todos estos casos la métrica (función ρ) está bien definida.

Para estudiar los ejemplos (3.1.5)-(3.1.7), (3.1.10) y (3.1.12) necesitaremos la desigualdad de Minkowski para n números, series o integrales. Así tenemos el siguiente:

Teorema 3.1.15 *(Desigualdad de Minkowski) Sea los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1.1}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c\, y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales).

Demostración: El primer paso consiste en probar que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}. \tag{3.1.2}$$

Para ello basta comprobar que el mínimo absoluto de la función $f:(0,1) \mapsto \mathbb{R}$, $f(t) = t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p$ con $u, v > 0$ y $1 < p < +\infty$ (en el caso de las igualdades es trivial) se alcanza en $t_* \in u/(u+v)$ y $f(t_*) = (u+v)^p$. Entonces, para todos x_i e y_i, usando (3.1.2) tenemos

$$\begin{aligned} |x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)^p &= \inf_{t\in(0,1)} (t^{1-p}|x_i|^p + (1-t)^{1-p}|y_i|^p) \\ &\leq t^{1-p}|x_i|^p + (1-t)^{1-p}|y_i|^p, \end{aligned}$$

que, sumando en i, nos conduce a

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq t^{1-p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + (1-t)^{1-p} \sum_{i=1}^n |y_i|^p.$$

Llamando $u^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, $v^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^p$ y tomando el ínfimo en $t \in (0,1)$ en la desigualdad anterior y usando nuevamente (3.1.2) se sigue que

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p,$$

de donde se obtiene el resultado (3.1.1).[1] ■

Del teorema anterior se sigue que los espacios $\mathbb{R}_p^n$ (o $\mathbb{C}_p^n$) del ejemplo (3.1.7) son espacios métricos.

La desigualdad de Minkowski (3.1.1) se puede extender fácilmente al caso de las series infinitas (ver problema 3.5), en el caso de que las mismas converjan. Así se tiene, en particular para las sucesiones numéricas $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$, que

$$\left(\sum_{i=1}^\infty (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^\infty y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.3}$$

[1] Esta prueba se debe a Heinz König (A simple proof of the Minkowski inequality. In: Walter, W. (eds) *General Inequalities 6. International Series of Numerical Mathematics,* Vol. 103. Birkhäuser, Basel, 1992, pág. 469).

De lo anterior se sigue que los espacios ℓ^p del ejemplo 3.1.12 son espacios métricos.

Análogamente, para las funciones integrables correspondientes (i.e., donde estén definidas las integrales) se tienen (ver problema 3.6) la desigualdades de y Minkowski para integrales, para todo $p \geq 1$

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1.4)$$

Luego los espacios $C^p_{[a,b]}$ del ejemplo 3.1.10 son espacios métricos. Para los ejemplos 3.1.13 y 3.1.14 usamos que la función real $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x/(1+x)$, es siempre creciente, luego $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tenemos

$$|a+b| \leq |a|+|b| \quad \Rightarrow \quad f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|),$$

luego

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

de donde se sigue el resultado (ver problema 3.16).

3.2. Algunas definiciones topológicas

Definición 3.2.1 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico, $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$. Definiremos la bola abierta $B(x_0, r)$ al conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\},$$

bola o esfera cerrada $S(x_0, r)$ al conjunto

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Las bolas abiertas $B(x_0, \epsilon)$ se suelen denominar ϵ-vecindades (o entornos) de x_0. Es evidente que toda ϵ-vecindad de x_0 contiene al propio x_0. Se suele decir que un entorno es pequeño si ϵ es pequeño.

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica habitual[2]. Entonces $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ y $S(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$.

[2]En adelante, a no ser que se diga lo contrario, para $\mathbb{R}$ y los distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$ usaremos la métrica habitual, es decir, la del ejemplo 3.1.3.

Definición 3.2.2 *Un punto x_0 se denomina punto interior del conjunto $M \subset \mathbb{X}$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.*

Es decir, un punto x es un punto interior de M si existe un entorno de dicho punto contenido en M. Por ejemplo, 1 es un punto interior de $(0, 2]$ con la métrica de $\mathbb{R}$, sin embargo 2 no lo es.

Definición 3.2.3 *Se dice que un punto $x_0 \in \mathbb{X}$ (no necesariamente $x_0 \in M \subset \mathbb{X}$) es un punto de la frontera de M si en cualquier entorno de x_0 (tan pequeño como se quiera) hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario $\mathbb{X} \backslash M$ (pudiendo ser, en ambos casos, el propio x_0). El conjunto de todos los puntos frontera de M se denomina frontera de M y se suele denotar por ∂M.*

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $M = (0, 1]$. Todos los $x_0 \in (0, 1)$ son interiores y los puntos 0 y 1 constituyen la frontera.

Nótese que puesto que la definición de punto frontera es simétrica respecto a al conjunto $M \subset \mathbb{X}$ y su complementario $\mathbb{X} \backslash M$, luego ambos tienen la misma frontera.

Definición 3.2.4 *Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si todos sus puntos son interiores. Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$ si es su complementario en $\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \backslash M$ es abierto.*

Está claro que un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si y solo si todos sus puntos (elementos) se pueden encerrar en una bola abierta contenida completamente en M. Nótese también que, dado un entorno $B(x_0, \epsilon)$ de x_0, y cualquiera sea $y \in B(x_0, \epsilon)$ existe un entorno de y tal que $B(y, \delta) \subset B(x_0, \epsilon)$. Es decir, cualquier punto dentro de una bola abierta (entorno) es el centro de un entorno contenido en dicha bola. Para probarlo notemos que todos los puntos z del entorno $B(x_0, \epsilon)$ sol tales que $\rho(x, z) < r$. Sea la bola $B(y, \delta)$ con $0 < \delta < r - \rho(x, y)$. Entonces, para todo $z \in B(y, \delta)$ tendremos que $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \delta = r$. O sea $B(y, \delta) \subset B(x_0, \epsilon)$. De lo anterior se deduce que las bolas son conjuntos abiertos.

Nótese que la definición de conjunto abierto es equivalente a decir que todos los puntos $x \in E$ están contenidos en un subconjunto abierto $F \subset E$ de E (si F es abierto todos los puntos de F son interiores, luego x es un punto interior de F y por tanto de E).

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. El conjunto $(0, 1)$ es abierto, $[0, 1]$ es cerrado y $[0, 1)$ no es ni abierto ni cerrado.

Proposición 3.2.5 *Un conjunto es abierto si y solo si no contiene ningún punto frontera.*

Demostración: Si M es abierto todos sus puntos son interiores, luego cada punto $x \in M$ tiene un entorno de puntos que solo contiene puntos de M por lo que no cualquier entorno de x tiene puntos de su complementario $\mathbb{X}\backslash M$, luego ningún x puede ser un punto frontera. Por otro lado, si M no tiene ningún punto frontera, entonces cualquier $x \in M$ no es un punto frontera, luego tiene que haber al menos un entorno de x que solo contenga puntos de E, luego x es un punto interior. Como x es cualquiera M es abierto. ■

Proposición 3.2.6 *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus punto frontera.*

Demostración: Si E es cerrado, su complementario $\mathbb{X}\backslash M$ es abierto, luego por la proposición 3.2.5 $\mathbb{X}\backslash M$ no contiene ningún punto frontera (recordemos que E y $\mathbb{X}\backslash M$ comparten la misma frontera), por tanto todos los puntos frontera de E pertenecen a E. Por otro lado, si E contiene a todos sus puntos frontera, entonces $\mathbb{X}\backslash M$ no contiene a ninguno y, por tanto, la proposición 3.2.5 nos dice que $\mathbb{X}\backslash M$ es abierto, luego M es cerrado. ■

Nótese que la frontera ∂M de cualquier conjunto M es un cerrado.

Antes de continuar vamos a describir como es la *geometría* de algunos espacios métricos. Como ejemplo tomaremos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ y escogeremos distintas métricas. En la figura 3.1 están representados las bolas $B(0,1)$ para las métricas de los ejemplos 3.1.5–3.1.8.

La siguiente proposición es de gran interés en la práctica:

Proposición 3.2.7 *Sea Σ en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$. Entonces*

1. $\emptyset \in \Sigma$, $\mathbb{X} \in \Sigma$,
2. *la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \ldots$ son abiertos, $\bigcup_k U_k \in \Sigma$*
3. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ son abiertos, $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \Sigma$.*

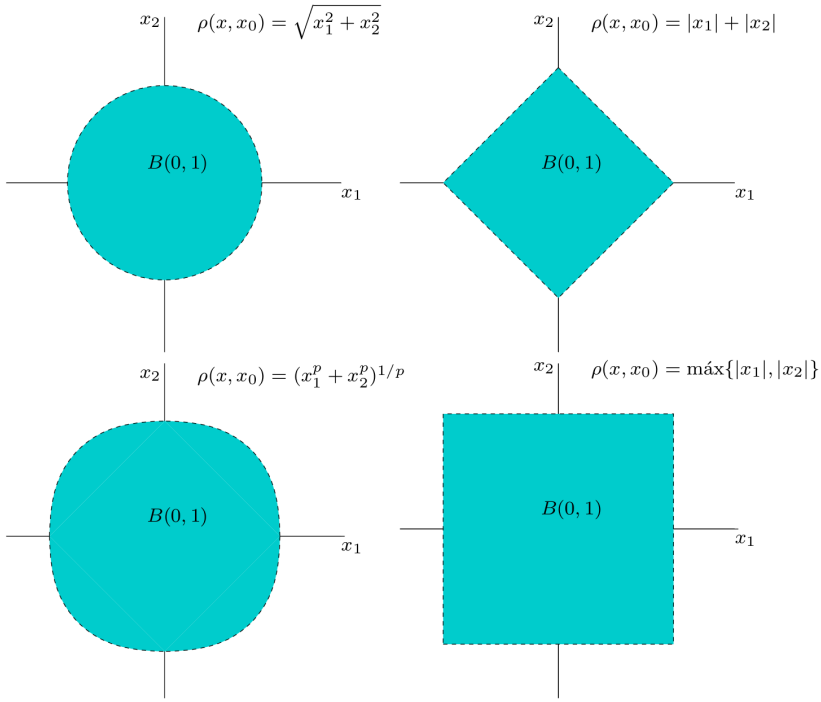


Figura 3.1: Entornos $B(0,1)$ según las métricas de los ejemplos 3.1.5 y 3.1.6 (arriba) y 3.1.7 ($p > 2$) y 3.1.8 (abajo). Las distancias $\rho(x, x_0)$ corresponden a los puntos $x = (x_1, x_2)$ y $x_0 = (0,0)$.

Demostración: El apartado 1. es evidente pues $\emptyset$ no contiene elementos y $\mathbb{X}$ es todo el espacio. Para probar 2. notemos que cualquiera sea $x \in U = \bigcup_k U_k \in \Sigma$, $x \in U_k$ para cierto k. Pero entonces existe una bola $B(x, \epsilon) \subset U_k$ pues U_k es abierto y por tanto para todo $x \in U$, existe una bola $B(x, \epsilon) \subset U$, de donde se sigue que U es abierto. Para probar 3. basta comprobar que es cierto para $n = 2$. Sean U_1 y U_2 dos abiertos. Si $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ entonces es trivial (por 1.). Asumamos $U = U_1 \bigcap U_2 \neq \emptyset$. Entonces para todo $x \in U$ existe una bola centrada en x tal que $B(x, \epsilon_1) \subset U_1$ y otra tal que $B(x, \epsilon_2) \subset U_2$. Pero entonces la bola $B(x, \epsilon)$ con radio $\epsilon = \text{mín}(\epsilon_1, \epsilon_2$ está contenida en U. ■

Las tres propiedades anteriores son de extrema importancia. Tal es así que ellas definen un tipo de espacios muy generales: Los espacios topológicos. Así, el par, dados un conjunto $\mathbb{X}$ y una colección Σ de subconjuntos de $\mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \Sigma)$ se denomina espacio topológico si Σ cumple con los *axio-*

mas (propiedades) 1, 2 y 3 de la proposición anterior. Al conjunto Σ se le denomina *topología* de $\mathbb{X}$. Así pues, todo espacio métrico es un espacio topológico.

Nota 3.2.8 *La intersección de un infinitos conjuntos abiertos no tiene que ser un abierto:* $\bigcap_{k=1}^{\infty}(0, 1 + 1/k) = (0, 1]$. *La unión de infinitos conjuntos cerrados no tiene que ser cerrada:* $\bigcup_{k=1}^{\infty}[0, 1 - 1/k) = [0, 1)$.

Definición 3.2.9 *Sea $M \subset \mathbb{X}$. Diremos que $x \in \mathbb{X}$ es un punto de contacto (o adherente) de M si en cualquier bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M. Así mismo, diremos que x es un punto de acumulación (o punto límite) de M si en cualquier bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equivalentemente, en cada bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M. Un punto x se denomina aislado de M si existe una bola $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ que no contiene ningún elemento M excepto el propio x.*

Nótese que si $x \in M$, entonces obviamente x es un punto de contacto de M. En particular, todo punto interior de M es un punto de contacto. Además, todo punto interior es obviamente un punto de acumulación. Por otro lado, x es un punto de acumulación de M si y sólo si es un punto de contacto de $M \setminus \{x\}$. De lo anterior se deduce que los puntos de contacto de M o bien son puntos límites, o bien son aislados. De hecho, si $x \in \mathbb{X}$ y no es de acumulación, entonces es aislado.

Nótese además que un punto límite de M no puede ser un punto interior de $\mathbb{X} \setminus M$ (pues si lo fuese entonces algún entorno de x no contendría puntos de M), luego x o es un punto interior de M o es un punto frontera. Obviamente todo conjunto contiene sus puntos interiores y si es cerrado, como ya vimos en la proposición 3.2.6, también contiene sus puntos frontera. Luego un conjunto cerrado contiene todos sus puntos límites. Por otro lado, si x es de la frontera de M, $x \in \partial M$, entonces cualquier entorno de x contiene puntos de M. Si $x \notin M$, entonces en todo entorno de x ha de haber elementos de M, por lo que x es un punto límite de M. Luego si M contiene todos sus puntos límites, contendrá todos sus puntos frontera y la proposición 3.2.6 nos dice entonces que M es cerrado. En otras palabras se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.2.10 *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.*

Definición 3.2.11 *Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.*

De la definición anterior se sigue que $\overline{M} = M \cup \{$conjunto de sus puntos límites$\}$. De hecho muchos textos definen la clausura de M al conjunto de de los elementos de M y sus puntos límites.

Por ejemplo, si $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pues todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Q}$ (¿por qué?).

Proposición 3.2.12 *Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Así, como $M \subset \overline{M}$, entonces $\overline{M}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a M.*

Demostración: $\Rightarrow$ Sea M cerrado. Como $M \subset \overline{M}$ basta probar que $M \supset \overline{M}$. Como M es cerrado, entonces $\mathbb{X} \setminus M$ es abierto así que para todo $x \in \mathbb{X} \setminus M$ existe una bola $B(x, r)$ completamente contenida en $\mathbb{X} \setminus M$, i.e., $B(x, r)$ no contiene puntos de M, luego $x \notin \overline{M}$ (pues si $x \in \overline{M}$ en cualquier bola $B(x, r)$ tendría que haber al menos un x' de M distinto de x lo cual contradice lo anterior), es decir, $x \in \mathbb{X} \setminus \overline{M}$, así que $\mathbb{X} \setminus M \subset \mathbb{X} \setminus \overline{M}$, i.e. $\overline{M} \subset M$.

$\Leftarrow$ Asumamos que $M = \overline{M}$. Probaremos que $\mathbb{X} \setminus M$ es abierto. Sea $x \notin M$, entonces $x \notin \overline{M}$. Entonces $x \in \mathbb{X} \setminus M$. Como $x \notin \overline{M}$ entonces x no es un punto adherente de M así que debe existir al menos una bola $B(x, r)$ que no contiene a ningún elemento de M, es decir $x \in \mathbb{X} \setminus M$ es un punto interior del conjunto $\mathbb{X} \setminus M$. Como x es arbitrario, $\mathbb{X} \setminus M$ es abierto luego M es cerrado. ■

Antes de continuar conviene destacar que la proposición anterior 3.2.12 se sigue también del hecho que $\overline{M} = M \cup \{$conjunto de sus puntos límites$\}$ y la proposición 3.2.10.

Definición 3.2.13 *Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si su diámetro $d(M) = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x, y)$ es finito.*

Está claro que si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, los conjuntos $(0, 1)$ y $[-2, 1)$ son acotados.

3.3. Aplicaciones en espacios métricos

Definición 3.3.1 *Por aplicación (operador) o función entenderemos una regla T que le hace corresponder a cada elemento del subconjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un único elemento del espacio métrico $\mathbb{Y}$. Así, $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = Tx$ o $y = T(x)$, donde $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$. Al conjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ se le denomina dominio de la aplicación.*

Definición 3.3.2 *Si a cada $x \in \mathcal{D}(T)$ le corresponde un valor $y = Tx \in \mathbb{Y}$ diremos que Tx es la imagen de x según T. Al conjunto de todas las imágenes Tx le denominaremos imagen (o rango) de T y le denotaremos por $\mathcal{I}(T)$.*

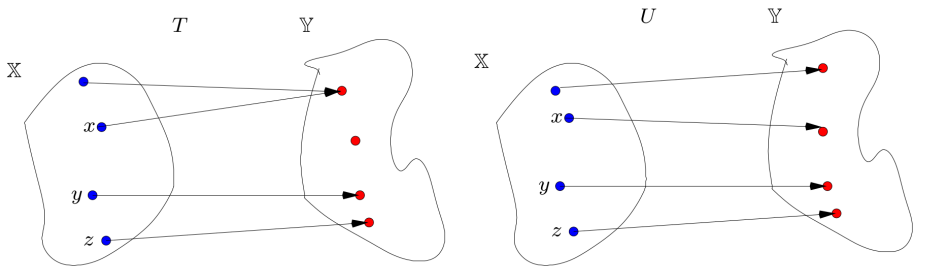


Figura 3.2: Aplicaciones $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y $U : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. U es inyectiva y T no lo es.

Definición 3.3.3 *La imagen inversa de $y \in \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$. La imagen inversa de un subconjunto $M \subset \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$ para todos $y \in M$.*

La imagen inversa de un elemento $y \in \mathbb{Y}$ puede ser el conjunto vacío, un único punto (elemento) de $\mathcal{D}(T)$ o un subconjunto $M \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición 3.3.4 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama sobreyectiva si todo elemento y de $\mathbb{Y}$ es imagen de algún elemento x del dominio, es decir T es tal que*

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \quad \exists x \in \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx = y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}(T) \equiv \mathbb{Y}.$$

Definición 3.3.5 *Una aplicación se llama inyectiva si todo elemento y de la imagen de T es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento x del dominio. Es decir $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es tal que*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T), \text{ tales que } y_1 = Tx_1 = y_2 = Tx_2, \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

O, equivalentemente, si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene $Tx_1 \neq Tx_2$.

Es decir una función inyectiva es tal que diferentes puntos tienen diferentes imágenes y por tanto la imagen inversa de cada $y \in \mathcal{I}(T)$ es un único elemento de $\mathcal{D}(T)$.

Definición 3.3.6 *Una aplicación inyectiva y sobreyectiva se denomina biyectiva.*

Es decir una aplicación es sobreyectiva si, para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene al menos una solución, e inyectiva si la ecuación anterior tiene o bien una única solución, o bien no tiene solución. Así mismo, T es biyectiva si para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene una y sólo una solución.

Para las aplicaciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

Definición 3.3.7 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva. Definiremos su aplicación inversa T^{-1} a la aplicación $T^{-1} : \mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ tal que a cada elemento $y \in \mathcal{I}(T)$ le hace corresponder un único $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx = y$, i.e., $x = T^{-1}y$.*

Para ilustrar los conceptos anteriores mostraremos algunos ejemplos con funciones reales.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es inyectiva pues para $f(x) = 4$, por ejemplo, existen dos valores de x del domino tales que $f(x) = 4$, ellos son $x = -2$ y $x = 2$. Esta función tampoco es sobreyectiva pues para $y = -1$ no existe ningún x del dominio tal que $f(x) = -1$ ($f(x) = -1 \Longleftrightarrow x^2 = -1$). Un ejemplo de función sobreyectiva es $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$. La función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva pues a cada $y \in f(A)$ le corresponde una $x \in [0, +\infty)$ tal que $f(x) = y$. Dicha x es $x = \sqrt{y}$. Por tanto la función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tiene inversa y dicha inversa es $f^{-1} : [0, +\infty) \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Definición 3.3.8 (Composición de aplicaciones) *Sean $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$ y $U : \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{I}(U) \subset \mathbb{Z}$ dos aplicaciones tales que $\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{D}(U)$. Entonces definiremos la aplicación $U \circ T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$ y la denominaremos aplicación compuesta de U y T a la aplicación que le hace corresponder a cada $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un elemento $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z = U(Tx)$ ($z = U\,Tx$).*

En general $UTx \neq TUx$, de hecho que exista $U \circ T$ no implica que exista $T \circ U$.

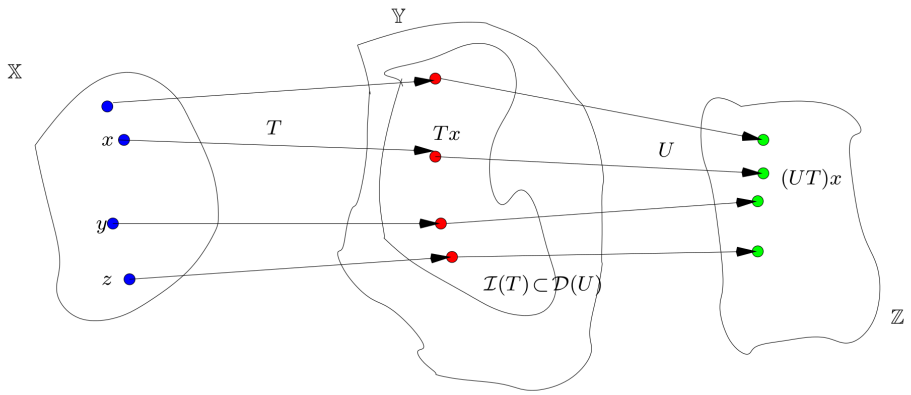


Figura 3.3: Composición de funciones $f \circ g$ de $f : A \mapsto C = f(A)$ $g : B \mapsto D$, $C = f(A) \subset B$.

Por ejemplo: sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Es evidente que la imagen de f está contenida en el dominio de g, por tanto podemos definir la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

Además, la imagen de g también está contenida en el dominio de f, por lo que podemos definir la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

Nótese que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. De hecho que exista $(f \circ g)(x)$ no implica que exista $(g \circ f)(x)$. Por ejemplo: $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, para las cuales tenemos $(f \circ g)(x) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$ pero $(g \circ f)(x)$ no existe.

Nota 3.3.9 *De las definiciones 3.3.7 y 3.3.8 se sigue que si una aplicación T es invertible, entonces $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{Y}}$ y $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{X}}$, donde $I_{\mathbb{Z}}$ es el operador identidad $I : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $Iz = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} = \mathbb{X}$ o $\mathbb{Y}$).*

Definición 3.3.10 *La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $T|_B$ que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$. La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $C \supset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $\widetilde{T}$ tal que $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, i.e., $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Definición 3.3.11 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que[3] $\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Se dice que T es continua en todo $M \subset \mathcal{D}(T)$ si T es continua en todo $x \in M$.*

Proposición 3.3.12 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{Y}$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{X}$.*

Demostración: $\Rightarrow$ Sea T continua y sea $S \subset \mathbb{Y}$ un abierto. Sea S_0 la imagen inversa de S. Si $S_0 = \emptyset$ la proposición es trivial asi que asumiremos que $S_0 \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in S_0$ cualquiera y sea $y_0 = Tx_0 \in S$ su imagen. Como S es abierto existe una bola $B(y_0, \epsilon) \subset S$. Pero T es continua así que existe una bola $B(x_0, \delta)$ tal que $T(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \epsilon)$. Pero como $B(y_0, \epsilon) \subset S$, entonces necesariamente $B(x_0, \delta) \subset S_0$, luego $x_0 \in S_0$ es interior y en virtud de que $x_0 \in S_0$ es arbitrario, S_0 es abierto.

$\Leftarrow$ Sea T una aplicación tal que imagen inversa de cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{Y}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{X}$. Sea $x_0 \in S_0$ cualquiera e $y_0 = Tx_0 \in S$. Sea $B(y_0, \epsilon) \subset S$ una bola de radio ϵ arbitrario. Sea S_0 la imagen inversa de dicha bola $B(y_0, \epsilon)$ que es un abierto. Entonces existe una bola $B(x_0, \delta) \subset S_0$ tal que $T(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \epsilon) \subset S$, i.e., T es continua en x_0. Como x_0 era arbitrario, entonces T es continua en $\mathcal{D}(T)$.■

[3] Aquí ρ denota la métrica de $\mathbb{X}$ y σ la de $\mathbb{Y}$.

3.4. Espacios métricos separables

Como ya hemos comentado, un espacio métrico puede contener *muchos* o *pocos* elementos. Es fácil intuir que en un espacio con *pocos* elementos es en general más sencillo para trabajar que en uno con muchos. Un ejemplo de ello es $\mathbb{R}$. Cuando trabajamos con números reales estos pueden ser racionales $\mathbb{Q}$ o irracionales $\mathbb{I}$. En el primer caso es sencillo operar con ellos en la práctica, pero en el segundo es formalmente imposible pues para representar un irracional necesitamos un número infinito de decimales. Sin embargo en los cursos de análisis matemático elementales se prueba que dado un irracional (en general de un real) cualquiera siempre se puede encontrar un racional que tan cerca como se quiera. Esta propiedad se conoce como la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Pero aparte de esta ventaja indudable de los racionales frente a los irracionales hay otra más: el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los racionales es numerable mientras que el de los irracionales (y por tanto $\mathbb{R}$) no lo es. En esta sección trataremos estas cuestiones para un espacio métrico general.

Definición 3.4.1 *Sea $M \subset \mathbb{X}$ un subconjunto de $\mathbb{X}$. Se dice que M es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura coincide con M, i.e., $\overline{M} = \mathbb{X}$.*

De la definición anterior se infiere que si M es denso $\mathbb{X}$ entonces cualquiera sea la bola $B(x, \epsilon)$ (por pequeño que sea $\epsilon > 0$) siempre contiene puntos de M. En otras palabras, cualquiera sea $x \in \mathbb{X}$, siempre tiene elementos de M tan cerca como se quiera.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ pues como ya hemos visto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definición 3.4.2 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ es separable si contiene un subespacio numerable*[4] *$M \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.*

Así pues, $\mathbb{R}$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.4.3 *Prueba que $\mathbb{C}$ es separable.*

[4]Un conjunto M cualquiera se denomina *numerable* si se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de M y los números naturales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es. Para más detalle ver el apartado 1.4.1.

Ejemplo 3.4.4 *Estudia la separabilidad del espacio métrico trivial del ejemplo 3.1.2.*

Es evidente que por la naturaleza de la métrica del espacio del ejemplo 3.1.2 este espacio no puede ser separable pues no en cualquier entorno de $x \in \mathbb{X}$ hay puntos de M (basta escoger $\epsilon = 1/2$, por ejemplo), a no ser que M sea el propio $\mathbb{X}$. En otras palabras, el único posible subconjunto denso de $\mathbb{X}$ es el propio $\mathbb{X}$, así que $\mathbb{X}$ es separable si y sólo si $\mathbb{X}$ es numerable. ■

Ejemplo 3.4.5 *Prueba que ℓ^2, el espacio del ejemplo 3.1.12 con $p = 2$, es separable.*

Sea $Q \subset \ell^2$ el espacio de todas las sucesiones del tipo $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde para todo k, q_k es racional. Obviamente Q es un subespacio numerable de ℓ^2 (¿por qué?)[5]. Probemos que Q es denso en ℓ^2. Sea $(x_n)_n \in \ell^2$ una sucesión cualquiera de ℓ^2. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que el resto r_n de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces para todo x_k existe un racional q_k tan cerca como se quiera, luego existe una sucesión $q \in Q$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Entonces, para todo $x \in \ell^2$ podemos encontrar un $q \in Q$ tal que

$$\rho(x, q)^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k - \underbrace{q_k}_{=0}|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2,$$

i.e., para todo $x \in \ell^2$, existe un $q \in Q$ tal que $\rho(x, q) < \epsilon$, luego Q es denso en ℓ^2. ■

Ejemplo 3.4.6 *Prueba que ℓ^∞ (ver ejemplo 3.1.11) no es separable.*

[5] Ver ejemplo 1.4.5.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ una sucesión de ceros y unos. Obviamente $y \in \ell^\infty$. Si a cada y le asociamos un número real que en base dos tenga la forma $r = y_1/2 + y_2/2^2 + \cdots + y_n/2^n + \cdots$, entonces acabamos de establecer una relación biunívoca entre los números reales del intervalo $[0, 1]$ y el conjunto de Y de todas las sucesiones de ceros y unos. Como $[0, 1]$ no es numerable, Y tampoco lo es. Sean dos sucesiones y e y' cualesquiera de Y. Obviamente (¿por qué?) $\rho(y, y') = 1$ si $y \neq y'$ y $\rho(y, y') = 0$ si $y = y'$. Sean $y \neq y'$ los centros de sendas bolas de radio 1/3 cada una. Obviamente dichas bolas no tienen puntos en común. Así pues, el conjunto de todas las bolas con centro en algún $y \in Y$ y radio 1/3 no tiene puntos en común. Sea M cualquier conjunto denso en ℓ^∞. Entonces, en cada una de las bolas anteriores debe haber al menos un elemento de M, luego M no es numerable (el conjunto de las bolas no lo es) y como M era arbitrario, entonces ℓ^∞ no tiene ningún conjunto numerable denso, así que ℓ^∞ no es separable. ■

Ejercicio 3.4.7 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico separable y sea $M \subset \mathbb{X}$. Prueba que M también es separable.*

Como $\mathbb{X}$ es separable existe una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ densa en $\mathbb{X}$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ elegimos $x \in M$ tal que $\rho(x, x_n) < 1/m$ (si existe, si no, no elegimos ninguno). Denotemos a estos elementos $x_{n,m}$, i.e., $\rho(x_{n,m}, x_n) < 1/m$. Está claro que el conjunto de todos los $x_{n,m}$ es numerable. Sea un $y \in M$ y un $\epsilon > 0$ cualquiera. Elijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \epsilon/2$. Como $(x_n)_n$ es denso en $\mathbb{X}$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(y, x_n) < 1/m < \epsilon/2$ (nótese que de lo anterior se sigue que el conjunto de los $x_{n,m}$ es no vacío). Ahora

$$\rho(y, x_{n,m}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, x_{n,m}) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < \epsilon.$$

Entonces, para todo $y \in M$ existe un elemento $x_{n,m}$ de un subconjunto numerable de M que está tan cerca como se quiera de él, luego M es separable. ■

Antes de discutir el concepto de convergencia en espacios métricos conviene hablar de otro tipo muy especial de conjuntos: los conjuntos raros o densos en ninguna parte.

En la definición 3.4.1 vimos que un un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso (en todas partes) en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$. Esto implica que si M no

es denso en $\mathbb{X}$, entonces $\overline{M} \neq \mathbb{X}$, por lo que $\overline{M}$ dejará sin rellenar algún entorno (abierto) de $\mathbb{X}$. Sin embargo hay otros conjuntos que también es conveniente conocer. Así tenemos la siguiente:

Definición 3.4.8 *Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro o denso en ninguna parte si su clausura $\overline{M}$ no contiene ningún entorno, i.e., el interior de $\overline{M} = \emptyset$.*

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura $\overline{M}$ no contiene puntos interiores. Ello implica que cualquier entorno de $\mathbb{X}$ contiene una bola que es disjunta de con M. A diferencia de los conjuntos no densos en general, los no raros son tales que su clausura tienen que rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$ pero no necesariamente todo el espacio.

Nótese que si M es cerrado, entonces $M = \overline{M}$, por tanto si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte. En efecto, si M no fuese raro, entonces $\overline{M}$ contendría un entorno, pero como $M = \overline{M}$, M contendría un entorno lo que es una contradicción.

Proposición 3.4.9 *Sea M un abierto. Entonces $\overline{M} \setminus M$ es raro.*

Demostración: Como M es abierto, entonces no contiene sus puntos frontera (ver proposición 3.2.5), luego todos los elementos de la frontera están en el cerrado $\overline{M}$ (ver proposición 3.2.6) y, por tanto, $\overline{M} \setminus M = \partial M$. Pero la frontera ∂M de M es un cerrado que no tiene ningún entorno, luego por lo anterior $\overline{M} \setminus M$ es raro. ■

Además, se tiene la siguiente caracterización:

Proposición 3.4.10 *Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro si y solo si $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$ es denso en $\mathbb{X}$, i.e., $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$.*

Demostración: Supongamos que M es raro pero $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} \neq \mathbb{X}$. Entonces hay elementos $x \in \mathbb{X}$ tales que existe una bola (entorno) $U = B(x, \delta)$ que no contiene elementos de $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$ y, por tanto, dicho entorno está contenido en $\overline{M}$ lo cual es una contradicción. Supongamos ahora que $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$ pero que M no es raro. Entonces existe un entorno (bola) $U = B(x, \delta) \subset \overline{M}$, luego $U \bigcap \mathbb{X} \setminus \overline{M} = \emptyset$, Pero entonces existen $x \in \mathbb{X}$ para los cuales existe un entorno que no contiene elementos de $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$, luego $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} \neq \mathbb{X}$, lo que es una contradicción. ■

Definición 3.4.11 *Un conjunto formado por la unión numerable de conjuntos raros se denomina de primera categoría o magro. Si un conjunto no es de primera categoría, entonces se dice que es de segunda categoría.*

Por ejemplo, si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, $(-1, 2]$ es de segunda categoría.

Aunque no es es nuestro objetivo tratar demasiado este tipo de cuestiones conviene mostrar un ejemplo de lo sutil que pueden llegar a ser estos conceptos. Como mencionamos antes, un conjunto numerable de puntos de $\mathbb{R}$ (por ejemplo los números naturales) es de primera categoría. El siguiente ejemplo muestra que no siempre es así. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ y elijamos la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Es obvio que los entornos (bolas) de Ω de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto no vacío de Ω que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto de Ω es necesariamente de segunda categoría.

Para terminar conviene hacer notar que el conjunto vacío $\emptyset$ es denso en ninguna parte (la palabra *raro* le viene muy bien), por tanto es de primera categoría, luego, un conjunto de segunda categoría tiene que tener elementos. Esa es una importante propiedad de estos conjuntos: si probamos que un conjunto es de segunda categoría entonces sabemos que dicho conjunto contiene elementos.

3.5. Convergencia en espacios métricos

En esta sección estudiaremos en concepto de convergencia en espacios métricos y alguna de sus consecuencias.

Definición 3.5.1 *Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ acotado tal que $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lo anterior es equivalente a que exista un $x \in \mathbb{X}$ y un número $K > 0$ tal que $\rho(x, x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.5.2 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ es convergente, y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, si existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es divergente.*

Nótese que en la propia definición de límite está explícito que el límite ha de ser un elemento de $\mathbb{X}$. Por ejemplo, sea $\mathbb{X}$ el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. La sucesión $x_n = 1/(n+1)$ no tiene límite en $\mathbb{X}$ ya que claramente $1/(n+1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pero $0 \notin (0, 1)$.

Una consecuencia de la propia definición es que, si existe el límite, este es único.

Ejercicio 3.5.3 *Da una interpretación* geométrica (topológica) *del concepto de límite en un espacio métrico cualquiera.*

Gracias al concepto de convergencia podemos dar una caracterización analítica muy elegante de los conjuntos cerrados.

Proposición 3.5.4 Sea M un subespacio no vacío de un espacio métrico $\mathbb{X}$, y sea $\overline{M}$ su clausura. Entonces

a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M (i.e., $\forall n,\ x_n \in M$) tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b) M es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implica que $x \in M$.

Demostración: Probemos a). Si $x \in M$, tomamos la sucesión $x_n = x$. Si $x \notin M$, entonces es un punto de acumulación de M y es fácil construir la sucesión x_n. Por otro lado si $x_n \in M$ es tal que $x_n \to x$ entonces, o bien $x \in M$ o bien en todo entorno de x hay un $x_n \neq x$, i.e., x es un punto de acumulación, luego $x \in \overline{M}$. La propiedad b) se deduce de a) teniendo en cuenta que un conjunto es cerrado si y solo si $M = \overline{M}$ (ver Proposición 3.2.12). ■

Definición 3.5.5 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina (secuencialmente) compacto si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Ejercicio 3.5.6 *Prueba que el espacio métrico discreto del ejemplo 3.1.2 constituido por infinitos puntos no es compacto. (**Ayuda:** Basta escoger una sucesión de elementos distintos.)*

Lema 3.5.7 *Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.*

Demostración: Sea M compacto y sea $x \in \overline{M}$ cualquiera. Como $x \in \overline{M}$ entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en M tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{X}$. Como M es compacto, entonces $x \in M$, luego $M = \overline{M}$ por lo que M es cerrado.

Supongamos que M es no acotado. Entonces existe al menos una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que, fijado un $b \in M$ arbitrario, se tiene que $\rho(x_n, b) > n$ (¿por qué?). Dicha sucesión obviamente no puede tener ninguna subsucesión convergente (pues caso que la tuviera ésta fuese acotada) y por tanto M no puede ser compacto. ■

El recíproco es falso. Por ejemplo escojamos $\mathbb{X} = \ell^2$ y sea el conjunto M de elementos $e_k = \delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$ i.e., todos los elementos de sucesión e_k son cero excepto el k-ésimo que es 1. Obviamente $\|e_k\| = 1$. M de los vectores $e_k = \delta_{k,i}$, i.e., vectores que todas las coordenadas son cero excepto la k-ésima que es 1. Obviamente $\|e_k\| = 1$. Además todos los puntos de M son aislados (¿por qué?), por tanto M es cerrado. Ahora bien, como M solo tiene puntos aislados, M no tiene ningún punto de acumulación por lo tanto ninguna sucesión que escojamos de elementos *distintos* de M contiene una subsucesión convergente.

Recordemos que una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua –ver la definición 3.3.11– en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que $\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. T es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in M$.

Ejercicio 3.5.8 *Prueba que la definición 3.3.11 de continuidad en un punto es equivalente a la siguiente definición por sucesiones: T es continua en x_0 si para cualquier sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, se tiene que $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0$.*

En efecto, supongamos T es continua según la definición 3.3.11 pero no lo es según la segunda. Entonces, ha de existir una sucesión $(x_n)_n$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ pero $Tx_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} Tx_0$, es decir, dada dicha sucesión x_n, existe un $\epsilon > 0$ tal que cualquiera sea $N \in \mathbb{N}$, existe un $n > N$ tal que $\sigma(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon$. Ahora bien, como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, entonces cualquiera sea $\delta > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Uniendo las dos condiciones anteriores deducimos que

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x = x_n, \ \rho(x_n, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sigma(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon,$$

lo cual contradice nuestra hipótesis.[6]

Supongamos ahora que T es continua según la definición por sucesiones pero no lo es según la definición 3.3.11. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que cualquiera sea $\delta > 0$ ha de existir un x tal que $\rho(x, x_0) < \delta$ que cumple con $\sigma(Tx, Tx_0) \geq \epsilon$. Escojamos $\delta = 1/n$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un x_n tal que $\rho(x_n, x_0) < 1/n$, o sea, $x_n \to x_0$ pero $\sigma(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon$. Luego $Tx_n \not\to Tx_0$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 3.5.9 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Entonces la imagen de M, $T(M)$ también es un conjunto compacto. I.e., las aplicaciones continuas transforman compactos en compactos.*

Demostración: Sea una sucesión $(y_n)_n \in T(M) \subset \mathbb{Y}$ cualquiera. Probemos que existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ convergente en $\mathbb{Y}$. Para ello notemos que como para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in T(M) \subset \mathbb{Y}$, entonces existe x_n tal que $Tx_n = y_n$. Como M es compacto, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente en M, pero entonces, por la continuidad de T, $Tx_{n_k} = y_{n_k} \to Tx \in T(M)$ cuando $k \to \infty$. Luego toda sucesión de $T(M)$ tiene una subsucesión convergente y por tanto $T(M)$ es compacto. ■

Corolario 3.5.10 *Sea una aplicación continua $T : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ de un compacto M en los reales. Entonces T alcanza su máximo y su mínimo absolutos.*

[6]Se puede dar una prueba directa de esta implicación como sigue: Sea $\epsilon > 0$, cualquiera. Como que T es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(x, x_0) \leq \delta$ entonces, $\sigma(Tx, Tx_0) \leq \epsilon$. Sea $(x_n)_n$ cualquiera tal que $x_n \to x_0$. Entonces para todo $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $\rho(x_n, x) < \delta$, pero entonces, por la continuidad de T se tiene que $\sigma(Tx_n, Tx_0) < \epsilon$, de donde se sigue el resultado.

Este corolario es una generalización del teorema de Weierstrass para las funciones continuas.

Demostración: Del teorema anterior se sigue que $T(M) \subset \mathbb{R}$ es compacto. Entonces por el lema 3.5.7 $T(M)$ es cerrado y acotado y por tanto $\text{ínf}(T(M))$ y $\sup(T(M))$ están contenidos en $T(M)$, i.e., existen x_1 y x_2 de M tales que $T(x_1) = \text{ínf}(T(M))$ y $T(x_2) = \sup(T(M))$, de donde se sigue el resultado. ■

3.5.1. Espacios métricos completos

Definición 3.5.11 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de Cauchy o fundamental si existe para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

En $\mathbb{R}$ toda sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. Esta propiedad fundamental de $\mathbb{R}$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$. Por ejemplo, si escogemos nuevamente $\mathbb{X}$ como el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$, la sucesión $x_n = 1/(n+1)$, que es de Cauchy (¿por qué?) no tiene límite en $\mathbb{X}$.

Definición 3.5.12 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge (a un elemento de $\mathbb{X}$).*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$, es completo. También lo es $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ con la métrica usual de $\mathbb{C}$. Sin embargo $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, es incompleto (¿por qué?), y el conjunto $\mathbb{X} = (0, 1)$ de antes también lo es.

Proposición 3.5.13 *Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente de elementos de un espacio métrico $\mathbb{X}$. Entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy.*

Demostración: Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon/2$. Luego, para todo p

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_{n+p}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

con tal que $n > N$, i.e., $(x_n)_n$ es de Cauchy. ■

Teorema 3.5.14 *Un subespacio M de un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Demostración: $\Rightarrow$ Sea M completo. Probaremos que $M = \overline{M}$. Sea $x \in \overline{M}$ cualquiera, entonces existe una sucesión (ver Proposición 3.5.4) de elementos de M que converge a x. Entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy (pues es convergente) pero M es completo, luego $x \in M$, i.e., $M = \overline{M}$.

$\Leftarrow$ Sea M cerrado (i.e., $M = \overline{M}$) y $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en M. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \in \mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ es completo). Pero entonces $x \in \mathbb{X}$ es un punto de acumulación de M, i.e., $x \in \overline{M}$ y como M es cerrado $x \in M$, i.e., toda sucesión de Cauchy en M tiene límite en M, i.e., M es completo. ■

Ejemplo 3.5.15 *Prueba que el espacio métrico ℓ^2 del ejemplo 3.1.12 ($p = 2$) es completo.*

Sea $x^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ una sucesión de Cauchy de ℓ^2, i.e., $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2 < +\infty$, y cualquiera sea $\epsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

con tal que n sea lo suficientemente grande. Pero entonces como todos los sumandos son positivos, podemos asegurar que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}| < \epsilon, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

y n suficientemente grande. I.e., cada una de las sucesiones reales (o complejas) $x_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, es de Cauchy. Pero $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es un espacio completo por lo que existe $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ para cada k. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Probemos que $x \in \ell^2$ y que $x^{(n)}$ converge a x en la métrica de ℓ^2. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2$$

entonces tenemos que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(n+p)}|^2 < \epsilon^2.$$

Como $x_k^{(n)}$ converge a x_k para cada k, y tomando el límite cuando $p \to \infty$ tenemos que para todo N

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leq \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leq \epsilon^2$$

o, equivalentemente, $\rho(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$, si n es suficientemente grande. Luego hemos probado que $x^{(n)}$ converge a x en la métrica de ℓ^2. Finalmente, usando la desigualdad ($0 = (0, 0, 0, \ldots)$)

$$\rho(x, 0) \leq \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, 0),$$

y usando que $x^{(n)}$ es de ℓ^2, se tiene que $\rho(x, 0)$ está acotada, por lo que $x \in \ell^2$. Al ser $x^{(n)}$ una sucesión fundamental arbitraria, se sigue que ℓ^2 es completo. ■

De forma análoga se puede probar que ℓ^p, $p \geq 1$ es completo.

Ejemplo 3.5.16 *Prueba que el espacio $C^2_{[a,b]}$ del ejemplo 3.1.10 no es completo.*

Vamos a probar que existe una sucesión fundamental de funciones continuas cuyo límite no puede ser, en la métrica de $C^2_{[a,b]}$, una función continua. Para ello construyamos la sucesión de funciones en $[-1, 1]$ [7]

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Para cada $x \in [-1, 1]$ tenemos que f_n converge puntualmente a f definida por

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

[7] Otro ejemplo análogo es el de la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan nx$. Uno más sencillo es definir $h_n(x) = 0$ para $x \in [-1, 0]$ y $h_n(x) = f_n(x)$ para $x \in (1/n, 1]$.

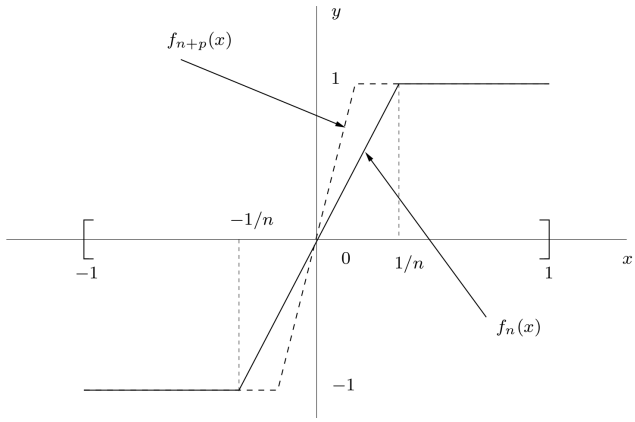


Figura 3.4: Sucesión de funciones del ejercicio 3.5.16.

Primero notemos que

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)|^2 \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

De la figura 3.4 se deduce[8]

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| dx < \frac{2}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\rho(f_n, f_{n+p}) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_{n+p}(x)|^2 dx} < \sqrt{\frac{2}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

es decir $(f_n)_n$ es una sucesión fundamental. Además,

$$\rho(f_n, f) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sea ahora una función continua cualquiera $g \in C^2_{[a,b]}$. De la desigualdad

$$\rho(f, g) \leq \rho(g, f_n) + \rho(f_n, f),$$

teniendo en cuenta que[9] $\rho(f, g) \neq 0$ y que $\rho(f_n, f)$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, se deduce que $\rho(g, f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho(f, g) \neq 0$ por lo

[8] Acótese la integral usando el área del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1/n, 1)$.

[9] Esto es consecuencia de que si una función continua es distinta de cero en un punto entonces mantiene su signo en todo un entorno. Como g tiene que ir de 0 a 1, en un entorno a la izquierda del cero $|g|$ ha de ser en dicho entorno, así que $\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)| dx \neq 0$, de donde se sigue que $\rho(f, g) \neq 0$.

que no existe ninguna función $g \in C^2_{[a,b]}$ que sea límite de $(f_n)_n$ en la métrica de $C^2_{[a,b]}$. Luego $C^2_{[a,b]}$ no es completo. ■

Ejemplo 3.5.17 *Probar que el espacio métrico $C_\infty([a,b])$ del ejemplo 3.1.9 es completo.*

Sea el espacio de las funciones continuas $C([a,b])$ con la métrica $\rho(f,g) = \text{máx}_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ y sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de cualquiera de Cauchy en dicho espacio. Entonces

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname*{máx}_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon/2,$$

o, equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \, \forall x \in [a,b], \quad |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon/2.$$

Luego por el criterio de Cauchy 1.3.16 f_n es uniformemente convergente.

Como $f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, entonces, por el teorema 1.3.27, $f \in C([a,b])$. Así, tomando el límite $p \to \infty$ en la expresión anterior tenemos

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > N, \, \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

de donde se sigue, tomando el máximo para todo $x \in [a,b]$ que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > N, \quad \rho(f_n, f) < \epsilon,$$

es decir, toda sucesión fundamental es convergente en $C_\infty([a,b])$ y por tanto $C_\infty([a,b])$ es completo. ■

Definición 3.5.18 *Sea sucesión de esferas (bolas cerradas) $(S_n(x_n,r_n))_n$, $S_n(x_n,r_n) \subset \mathbb{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$S_1(x_1,r_1) \supset S_2(x_2,r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n,r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1},r_{n+1}) \supset \cdots .$$

se denomina sucesión de esferas (cerradas) encajadas.

Teorema 3.5.19 (De las esferas encajadas) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. Entonces, $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^\infty S_n(x_n,r_n) \neq \emptyset$.*

Demostración: $\Rightarrow$ Sea $\mathbb{X}$ completo y sea $S_n(x_n, r_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, una sucesión de esferas encajadas con $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces la sucesión $(x_n)_n$ de los centros de las esferas son una sucesión de Cauchy (¿por qué?). Como $\mathbb{X}$ es completo, entonces existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{X}$. Probemos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$. Como las esferas son encajadas, entonces cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, la esfera S_n contiene los elementos $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, así que x es un punto límite de S_n, para todo n, pero como S_n es cerrada $x \in S_n$ para todo n, luego $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$.

$\Leftarrow$ Probemos la implicación contraria. Sea $(x_n)_n$ una sucesión fundamental arbitraria de $\mathbb{X}$, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \mid \forall n, m > N, \quad \rho(x_n, x_m) < \epsilon. \tag{*}$$

Sea $\epsilon = 1/2$. Como $(x_n)_n$ es de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1$, $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ (tomamos $N = n_1 - 1$ en (*)). Sea la esfera $S_1 := S(x_{n_1}, 1)$. Está claro que $x_n \in S_1$ para todos los $n > n_1$.

Sea ahora $\epsilon = 1/2^2$. Entonces existe $n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_2$, $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$. Además, como $n_2 > n_1$, tenemos que $\rho(x_{n_2}, x_{n_1}) < 1/2$. Sea la esfera $S_2 := S(x_{n_2}, 1/2)$. Está claro que que, por un lado $x_{n_2} \in S_1$ y que $x_n \in S_2$ para todos los $n > n_2$. Y así sucesivamente.

De esta forma construimos una sucesión de esferas $S_k := S(x_{n_k}, 1/2^{k-1})$ cuyos centros son los elementos de la subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que cumplen que $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 1/2^k$. Probemos que $S_{k+1} \subset S_k$. Para ello probaremos que $\forall x \in S_{k+1}$ es tal que $x \in S_k$. Si $x \in S_{k+1}$, entonces $\rho(x, x_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$, luego la distancia entre x y x_{n_k} cumple con

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \Rightarrow \quad x \in S_k,$$

luego $S_{k+1} \subset S_k$ y por tanto la sucesión $(S_k)_k$ es una sucesión de esferas encajadas cuyos radios, por construcción $r_k = 1/2^{k-1} \to 0$. Pero como, por hipótesis, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero tiene intersección no vacía, entonces existe $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$, y obviamente $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ (¿por qué?). Pero $(x_n)_n$ es una sucesión fundamental y hemos probado que tiene una subsucesión convergente, luego la propia sucesión converge a x (ver el apartado 2 del problema 3.10). ■

Ejercicio 3.5.20 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es completo, entonces la $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$, con $r_n \to 0$, contiene un único punto. (**Ayuda:** Usa el teorema anterior y reducción al absurdo).*

Apliquemos el teorema anterior al espacio métrico $\mathbb{R}$. Como sabemos $\mathbb{R}$ es completo, luego toda sucesión de esferas encajadas, en este caso los intervalos cerrados $[x_n - r_n, x_n + r_n]$, tales que $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tienen al menos un punto en común $\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n - r_n, x_n + r_n] \neq \emptyset$. De hecho tienen uno y sólo uno. Lo anterior no es más que el Teorema de los intervalos encajados de Cantor en $\mathbb{R}$.

Nota 3.5.21 *En el Teorema de las esferas encajadas 3.5.19 se puede cambiar la condición de que los radios de las esferas tiendan a cero por que las esferas sean compactas.*

Definición 3.5.22 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva del espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ al espacio métrico $(\mathbb{Y}, \sigma)$. Diremos que T es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Esto tiene una implicación muy importante: Si dos espacios son isométricos, entonces las distancias de los elementos originales y de sus imágenes según T son las mismas, es decir los espacios sólo difieren por la naturaleza del conjunto $\mathbb{X}$ pero son *idénticos* según la métrica. En particular los conceptos *topológicos* (entorno, cercanía, etc) son los equivalentes en ambos espacios.

Definición 3.5.23 *Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico y sea $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ su clausura. Llamaremos completamiento de $\mathbb{X}$ al espacio métrico completo $\mathbb{X}^*$ tal que $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ y $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$.*

Por ejemplo, el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ es el completamiento del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.5.24 *¿Cuál es el completamiento del espacio $(0, 1)$ discutido anteriormente?*

Teorema 3.5.25 *Todo espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si $\mathbb{X}^*$ y $\mathbb{X}^{**}$ son dos completamientos de $\mathbb{X}$, entonces existe una aplicación $T : \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$, $x^{**} = Tx^*$ tal que $Tx = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(Tx^*, Ty^*)$.*

La demostración de este Teorema se puede encontrar, por ejemplo, en las monografías [5, 6].

3.5.2. El Teorema del punto fijo

Definición 3.5.26 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. Si existe un $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

Ejercicio 3.5.27 *Prueba que toda aplicación de contracción es continua.*

Usando la definición de continuidad mediante sucesiones (ver ejercicio 3.5.8) tenemos que probar que si $x_n \to x$, entonces $Tx_n \to Tx$. Pero como T es de contracción $\rho(Tx_n, Tx) \leq \alpha\rho(x_n, x) \to 0$, de donde se tiene el resultado. Nótese que no es necesario que $\alpha \in (0,1)$ para probar el resultado. ■

Definición 3.5.28 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. El punto $x \in \mathbb{X}$ se denomina punto fijo de T si $Tx = x$.*

Teorema 3.5.29 (Del punto fijo) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.*

Demostración: Sea $x_0 \in \mathbb{X}$ cualquiera. Construyamos la siguiente sucesión

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad x_n = Tx_{n-1} \quad \Rightarrow x_n = T^n x_0.$$

Probemos que $(x_n)_n$ es fundamental.

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+p}) &= \rho(T^n x_0, T^n(T^p x_0)) \\
&\leq \alpha^n \rho(x_0, T^p x_0) = \alpha^n \rho(x_0, x_p) \\
&\leq \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{p-1}, x_p)\right] \\
&\leq \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \rho(Tx_0, Tx_1) + \cdots + \rho(T^{p-1}x_0, T^{p-1}x_1)\right] \\
&\leq \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{p-1}\rho(x_0, x_1)\right] \\
&\leq \alpha\rho(x_0, x_1)\frac{1-\alpha^p}{1-p} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Luego cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$ (¿por qué?), i.e., $(x_n)_n$ es fundamental. Como

X es completo entonces dicha sucesión tiene límite, i.e., $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pero entonces, como T es continua $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, pero $Tx_n = x_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$, así que tomando límites en $Tx_n = x_{n+1}$ obtenemos $x = Tx$.

Para probar la unicidad asumamos que existen dos puntos fijos x e y con $x \neq y$. Así $Tx = x$ y $Ty = y$, pero

$$\rho(x,y) \leq \rho(Tx,Ty) \leq \alpha\rho(x,y) \;\Rightarrow\; (1-\alpha)\rho(x,y) \leq 0 \;\Rightarrow\; \rho(x,y) = 0,$$

que implica $x = y$, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 3.5.30 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces cualquiera sea el elemento $x_0 \in \mathbb{X}$ la sucesión x_0, $x_1 = Tx_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1}, \ldots$, tiene un único punto límite que coincide con el punto fijo de T. Además, $\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$.*

Demostración: La prueba es inmediata a partir de la desigualdad

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1),$$

tomando límite cuando $p \to \infty$. ■

Ejemplo 3.5.31 Como ejemplo *sencillo* consideremos las funciones reales en $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ tales que para todos x_1 e x_2 de $[a,b]$ se satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \qquad K \in (0,1).$$

Entonces, f es una aplicación de contracción y por el Teorema del punto fijo la sucesión

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \ldots$$

converge a un único límite x tal que $x = f(x)$. En particular, f satisface la condición de Lipschitz si f es diferenciable y $|f'(x)| \leq K < 1$ en $[a,b]$.

Definición 3.5.32 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión*[10] *de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge puntualmente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si para todo $x \in M$ la sucesión $(T_n x)_n$ es convergente, i.e., para cada $x \in M$ $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx = y \in \mathbb{Y}$.*

[10] Se asume que todos los operadores T_n tienen el mismo dominio $\mathcal{D}(T_n)$.

En otras palabras

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in M \quad \exists N := N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N \;\Rightarrow\; \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Está claro de la definición anterior que el número N depende no sólo del valor de ϵ sino también del elemento x. Para diferentes x tendremos en general diferentes N.

Definición 3.5.33 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge uniformemente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N \text{ y } \forall x \in M \;\Rightarrow\; \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Es decir, fijado el $\epsilon > 0$, podemos escoger un N tal que la desigualdad $\rho(T_n x, Tx) < \epsilon$ es cierta en todo el subconjunto M.

Este concepto es bastante delicado incluso en el caso de las funciones reales como ya vimos en el capítulo 1 de estas notas.

Una aplicación del teorema del punto fijo

Apliquemos el teorema del punto fijo vamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 3.5.34 (Picard) *Sea $f(x, y)$ una función continua en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) y satisface la condición de Lipschitz en y, i.e.,*

$$\exists K > 0; \; \forall x, y, \tilde{y} \in \Omega, \; |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}|,$$

entonces existe un δ-entorno de x_0, donde el problema de valores iniciales

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

tiene solución única.

Demostración: Ante todo notemos que el problema de valores iniciales es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

La idea de la prueba es la siguiente. Vamos a probar que la aplicación

$$T : C^* \mapsto C^*, \quad \phi = Ty \quad \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

es una aplicación de contracción en cierto espacio completo C^*.

Construyamos un subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ cerrado y acotado adecuado. Para ello notemos que como f es continua, entonces existe una $M > 0$ tal que para todos $(x, y) \in \Omega$ (y por tanto en Ω'), $|f(x, y)| \leq M$. Dado $\delta > 0$ tal que $K\delta < 1$, escogeremos el conjunto Ω' tal que $(x, y) \in \Omega'$ si $|x - x_0| \leq \delta$ y $|y - y_0| \leq M\delta$.

Sea C^* el espacio de las funciones continuas y en el intervalo I definido por $|x - x_0| \leq \delta$ y tales que $|y - y_0| \leq M\delta$. Definamos en dicho espacio C^* la métrica $\rho(g, h) = \text{máx}_{x\in I} |g(x) - h(x)|$. Probemos que C^* es cerrado en $C_\infty(I)$, por tanto es completo (¿por qué?). Para ello usaremos que un subconjunto M es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implica que $x \in M$ (ver Proposición 3.5.4). Sea $(y_n)_n \in C^*$ tal que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como $(y_n)_n \in C^*$ entonces para todo n y cualquiera sea $x \in I$

$$|y_n(t) - y_0| \leq M\delta. \tag{3.5.1}$$

Pero

$$|y(t) - y_0| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_0| \leq \operatorname*{máx}_{x\in I} |y(t) - y_n(t)| + M\delta,$$

donde, para el segundo sumando hemos usado (3.5.1). Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$ y usando que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, se sigue que $|y(t) - y_0| \leq M\delta$, i.e., $y \in C^*$, luego C^* es cerrado.

Definamos ahora la aplicación

$$T, \quad \phi = Ty \quad \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Si $y \in C^*$, entonces $|y - y_0| \leq M\delta$ y $x \in I$,

$$|\phi - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq M\delta,$$

i.e., $T : C^* \mapsto C^*$. Pero además, cualesquiera sean y e $\tilde{y}$ de C^*, $\phi = Ty$, $\tilde{\phi} = T\tilde{y}$,

$$|\phi - \tilde{\phi}| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))|dt \leq K\delta \operatorname*{máx}_{x\in I} |y - \tilde{y}|,$$

de donde se sigue, tomando $\max$ en I que $\rho(\phi, \tilde{\phi}) \leq K\delta\rho(y, \tilde{y})$, con $K\delta < 1$. O sea, T es de contracción, luego por el teorema 3.5.29, T tiene un único punto fijo, luego existe una única solución de la ecuación $Ty = y$, i.e., el problema de valores iniciales tiene una única solución en C^*, funciones continuas en $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y tales que $|y(x) - y_0| \leq M\delta$. ■

Nótese que del corolario 3.5.30 se sigue que la solución del problema de valores iniciales puede ser aproximada mediante la sucesión

$$\begin{aligned} y_0(x) =& y_0, \\ y_1(x) =& y_0 + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt, \\ &\vdots \\ y_n(x) =& y_0 + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

conocida como sucesión de Picard.[11]

3.6. El teorema de las categorías de Baire

Vamos a terminar este capítulo demostrando un teorema importante relacionado con los espacios métricos completos que nos será de utilidad más adelante.

Teorema 3.6.1 (Baire) *Un espacio métrico $\mathbb{X} \neq \emptyset$ completo es de segunda categoría.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{X}$ es magro (de primera categoría), entonces

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \quad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos raros.} \tag{3.6.1}$$

Sea M_1 raro. Entonces $\overline{M_1}$ no puede contener un entorno (abierto). Pero $\mathbb{X}$ si que puede contener un abierto (el propio $\mathbb{X}$), luego $\mathbb{X} \neq \overline{M_1}$, de donde se

[11] Compárese con lo discutido en el apartado 2.2.

sigue que $C(\overline{M_1}) := \mathbb{X} \setminus \overline{M_1}$ es no vacío. Sea $x_1 \in C(\overline{M_1})$. Como $x_1 \notin \overline{M_1}$, x_1 no puede ser un punto de acumulación de M_1 (ni un punto frontera de $\overline{M_1}$) y, por tanto, ha de haber una bola[12] $B_1 := B(x_1, \epsilon_1) \subset C(\overline{M_1})$, $\epsilon_1 < 1/2$ ($\overline{M_1}$ es cerrado, luego $C(\overline{M_1})$ es abierto y x_1 es un punto interior de $C(\overline{M_1})$). Nótese que $B_1 \bigcap M_1 = \emptyset$.

Sea ahora M_2, que también es raro y por tanto $\overline{M_2}$ no puede contener abiertos. Entonces $\overline{M_2}$ no puede contener a la bola $B(x_1, \epsilon_1/2)$, por tanto $C(\overline{M_2}) \bigcap B(x_1, \epsilon_1/2) \neq \emptyset$ y es abierto, luego podemos elegir un x_2 y una bola $B_2 := B(x_2, \epsilon_2)$, $\epsilon_2 < \epsilon_1/2 < 1/2^2$, tal que $B_2 \in C(\overline{M_2}) \bigcap B(x_1, \epsilon_1/2) \subset B_1$ (está claro que $B(x_1, \epsilon_1/2) \subset B(x_1, \epsilon_1) = B_1$) con $B_2 \bigcap M_2 = \emptyset$ (B_2 está en el complementario de $\overline{M_2}$). Y así sucesivamente.

De esta forma tendremos una sucesión de bolas (entornos) $B_1, B_2, \ldots,$ $B_n, \ldots,$ con $\epsilon_k < 1/2^k$ tales que $B_k \bigcap M_k = \emptyset$, y

$$B_{k+1} = B(x_{k+1}, \epsilon_{k+1}) \subset B(x_k, \epsilon_k/2) \subset B(x_k, \epsilon_k) = B_k.$$

Es más, para todo $n > m$

$$B_n = B(x_n, \epsilon_n) \subset B(x_m, \epsilon_m/2) \subset B(x_m, \epsilon_m) = B_m,$$

por tanto $\rho(x_n, x_m) < 1/2^m$, lo que significa que la sucesión $(x_n)_n$ de los centros de B_n es de Cauchy. Como $\mathbb{X}$ es completo, $x_n \to x$, $x \in \mathbb{X}$. Además, de la inclusión anterior $B_n \subset B(x_m, \epsilon_m/2)$ se tiene que $x_n \in B(x_m, \epsilon_m/2)$, y, por tanto, de la desigualdad triangular se sigue que para todo $n > m$

$$\rho(x_m, x) \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, x) \leq \frac{\epsilon_m}{2} + \rho(x_n, x) \to \frac{\epsilon_m}{2}$$

cuando $n \to \infty$. Luego, $\rho(x_m, x) \leq \epsilon_m/2 < \epsilon_m$, i.e., $x \in B_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $B_m \in C(\overline{M_m})$, entonces $x \notin M_m$ para todo m, lo cual contradice (3.6.1). Luego X no puede ser de primera categoría lo cual prueba el teorema. ■

Corolario 3.6.2 *Sea $\mathbb{X} \neq \emptyset$ un espacio métrico completo. Supongamos que*

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados}.$$

Entonces al menos un M_k contiene un abierto no vacío (un entorno).

Demostración: Si fuese falso todos los M_k serían conjuntos raros (pues al ser cerrados $\overline{M_k} = M_k$) y $\mathbb{X}$ sería un conjunto de primera categoría (magro) lo cual contradice el Teorema de Baire. ■

[12] Recuérdese que las bolas son conjuntos abiertos.

Dos aplicaciones "sencillas" al análisis clásico

El teorema de Baire nos será de gran utilidad para probar algunos teoremas clásicos del análisis funcional como veremos más adelante. No obstante, en este apartado veremos dos ejemplos *sencillos* de aplicación al análisis clásico.

Ejemplo 1. No es complicado probar que existen funciones continuas en los irracionales y discontinuas en los racionales de para distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$ (ver por ejemplo el problema 3.21). ¿Y al contrario? Es decir, ¿existen funciones continuas en los racionales y discontinuas en los irracionales? La respuesta es no.

Vamos a probar que no existen funciones definidas en $[0,1]$ que sean continuas en cada racional de $(0,1)$ y discontinuas en cada irracional de $(0,1)$. Para ello necesitamos ciertas definiciones previas.

Sea $a \in I \subset \mathbb{R}$, I abierto, $I_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \subset I$. Definamos las cantidades

$$\omega(f,I) = \sup_{x,y\in I} |f(x)-f(y)|, \quad \omega(f,a) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f, I_\delta(a)),$$

conocidas como *oscilación* de f en en abierto I y el punto $a \in I$, respectivamente. Es claro que para todo abierto $U \subset I$, $\omega(f,U) \leq \omega(f,I)$, luego $\omega(f,a) \leq \omega(f, I_\delta(a)) \leq \omega(f,I)$.

Es sencillo ver que una función f es continua en $x = a$ si y solo si $\omega(f,a) = 0$. Por otro lado, el conjunto $U(x,\epsilon)$ de las $x \in I$ tales que $\omega(f,x) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ es abierto. Para ello tomemos $\epsilon > 0$ y sea $x_0 \in U(x,\epsilon)$. Sea $J \subset U(x,\epsilon)$ un abierto que contenga a x_0 tal que $\omega(f,J) < \epsilon$. Entonces, para todo $y \in J$ se tiene que $\omega(f,y) \leq \omega(f,J) < \epsilon$, luego todo x_0 de $U(x,\epsilon)$ está contenido en un abierto contenido en $U(x,\epsilon)$, i.e., $U(x,\epsilon)$ es abierto.

Supongamos que tenemos una función continua en cada racional de $(0,1)$ y discontinua en cada irracional de $(0,1)$. Sean los conjuntos

$$U_n = \{x \in (0,1) \,|\, \omega(f,x) < 1/n\}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Los U_n son abiertos. Como f es continua en los racionales $r_n \in (0,1)$, $\omega(f,r_n) = 0$, luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = (0,1) \bigcap \mathbb{Q}$, es decir, la intersección de todos los U_n solo pueden ser los racionales de $(0,1)$ (pues f es discontinua en los irracionales, luego $\omega(f,i) \geq \epsilon > 0$ para todo i irracional). Como

los racionales son densos en $(0,1)$, entonces cada U_n es denso en $(0,1)$ (pues la intersección de todos los U_n son los racionales de $(0,1)$). Sean ahora los conjuntos $V_n = (0,1) \setminus U_n$, $n = 1, 2, \ldots$, que son cerrados. Como U_n es denso en $(0,1)$, entonces V_n es raro en $(0,1)$ (ver la proposición 3.4.10). Además, $(0,1) \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, y por tanto $\mathbb{Q} \bigcap (0,1)$ también, podemos construir una sucesión $(q_n)_n$ que enumera a los racionales de $(0,1)$. Entonces

$$(0,1) = V_1 \bigcup \{q_1\} \bigcup V_2 \bigcup \{q_2\} \bigcup \cdots$$

y por tanto

$$[0,1] = \{0\} \bigcup \{1\} \bigcup V_1 \bigcup V_2 \bigcup \{q_2\} \bigcup \cdots$$

que es una unión numerable de conjuntos raros y, por tanto, de primera categoría. Pero $[0,1]$ es completo (es un cerrado de $\mathbb{R}$), luego, por el Teorema de Baire es de segunda categoría, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2. Sea $C_\infty([0,1])$ el espacio métrico de las funciones continuas en $[0,1]$ con la métrica del $\rho(f,g) = \text{máx}_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Como ya vimos (ver ejemplo 3.5.17) este espacio es completo. Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Vamos a probar que A es un conjunto de primera categoría. Es decir, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.6.3 *El conjunto de todas las funciones continuas que no tienen ninguna derivada lateral finita en ningún punto del intervalo* $[0,1]$ *es de segunda categoría.*

O sea, las funciones con las que estamos acostumbrados a trabajar en el análisis constituyen un conjunto magro.

Demostración: Para probar el teorema construiremos la siguiente familia de subconjuntos E_n de las funciones continuas $f \in C([0,1])$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n, \ \forall h \in (0, 1/n), \ \text{para algún } x \in [0, 1-1/n] \right\}.$$

Si una función continua es tal que en algún punto su derivada lateral existe, entonces $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}$ es acotada (¿por qué?), por tanto todo elemento de A, el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un

punto una derivada lateral finita, pertenece a algún E_n. Está claro que el conjunto de los E_n es numerable.

Probemos que E_n es cerrado para todo n. Para ello mostraremos que si $f \in \overline{E_n}$, entonces $f \in E_n$. Nótese que como la convergencia es uniforme (E_n es un subespacio de $C_\infty([0,1])$), entonces f es continua. Si $f \in E_n$, entonces existe $(f_k)_k \in E_n$ tal que $f_k \to f$ (¿por qué?). Ahora bien, como $f_k \to f$ tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $k > N$, $\operatorname{máx}_{x\in[0,1]} |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2}h\epsilon$.

Por otro lado,

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq \frac{|f(x+h) - f_k(x+h)|}{h} + \frac{|f_k(x+h) - f_k(x)|}{h} + \frac{|f_k(x) - f(x)|}{h}.$$

Luego, luego para todo $\epsilon > 0$ y todo $k > N$ tenemos que el primer y último sumandos son menores o iguales que $\epsilon/2$, y por tanto

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq \frac{|f_k(x+h) - f_k(x)|}{h} + \epsilon.$$

Pero, para cada $\epsilon > 0$ y cada k existe un $x \in [0, 1-1/n]$ tal que $\frac{|f_k(x+h)-f_k(x)|}{h} \leq n$, pues $f_k \in E_n$, de donde se sigue que $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \leq n$, y, por tanto, $f \in E_n$, luego E_n es cerrado.

Existe otra forma de probar que $f \in E_n$ que es la siguiente. Como $f_k \in E_n$, existe para cada k un $x \in [0, 1-1/n]$, que denotaremos por x_k, tal que

$$\frac{|f_k(x_k + h) - f(x_k)|}{h} \leq n, \quad x_k \in [0, 1-1/n].$$

Como x_k es una sucesión acotada, podemos encontrar una subsucesión convergente $x_{k_j} \to x \in [0, 1-1/n]$. Para dicha subsucesión tenemos

$$\frac{|f_{k_j}(x_{k_j} + h) - f(x_{k_j})|}{h} \leq n, \quad x_k \in [0, 1-1/n].$$

Pero como $f_k \to f$, entonces $f_{k_j} \to f$, luego, tomando límite cuando $j \to \infty$ tenemos que $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \leq n$, para cierto $x \in [0, 1-1/n]$, i.e., $f \in E_n$.

Probemos ahora que $\overline{C([0,1]) \setminus E_n} = C([0,1])$, entonces la proposición 3.4.10 nos dice que E_n es raro y, por tanto, la unión de todos los E_n es de primera categoría, luego A también.

Notemos que $D_n = C([0,1]) \setminus E_n$ es el conjunto de las $f \in C([0,1])$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$D_n = \left\{ \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} > n, \text{ para algún } h \in (0,1/n), \text{ y } \forall x \in [0,1-1/n] \right\}.$$

Para probar que $\overline{D_n} = C([0,1])$ lo que haremos en probar que en cualquier entorno de $C([0,1])$ hay un elemento de D_n, o lo que es lo mismo, que para cualquiera sea $h \in C([0,1])$ y cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe una $g \in D_n$ tal que $\rho(h,g) < \epsilon$. Para ello necesitamos un teorema auxiliar cuya prueba[13] omitiremos:

Teorema 3.6.4 (de aproximación de Weierstrass) *Sea I un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y sea $f(x)$ una función continua en I. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio $p(x)$ definido en I tal que*

$$\max_{x \in I} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Entonces para toda $h \in C([0,1])$ existe un polinomio $p(x)$ en $[0,1]$ tal que $\rho(h,p) < \epsilon/4$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ construyamos una función sierra (una recta creciente y una decreciente) $s_n(x)$ como la de la figura 3.5 cuya altura sea $\epsilon/4$ y cuya pendiente m sea mayor, en valor absoluto, que $\max_{x\in[0,1]} |p'(x)| + n$, de forma que la función[14] $g(x) = p(x) + s_n(x)$ pertenece a cada D_n y es tal que

$$|h(x) - g(x)| \leq |h(x) - p(x)| + |s_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(h,g) < \epsilon.$$

Así E_n es raro pues su complementario es denso en $C([0,1])$. Ahora bien, como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, y los E_n son raros, entonces A es de primera categoría, y como $C([0,1])$ es un espacio de segunda categoría por el Teorema de Baire 3.6.1 y $C([0,1]) = A \bigcup \{C([0,1]) \setminus A\}$, entonces $C([0,1]) \setminus A$ es de segunda categoría. ■

Conclusión, existen funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto, y dado que el conjunto de esas funciones es de segunda categoría ello implica que dichas funciones *monstruos* son las más comunes en el análisis.

De manera similar se puede probar que no existen funciones definidas en $[0,1]$ que sean continuas en cada racional de $[0,1]$ y discontinuas en cada irracional de $[0,1]$. Cuestión que dejamos como ejercicio[15] al lector.

[13] Ver, e.g., [2, pág. 129–130].

[14] Nótese que para $s_n(x)$ se tiene que $\frac{|s_n(x+h)-s_n(x)|}{h} = m > n$.

[15] Ver, por ejemplo, [8, Teorema 6.6, pág. 149].

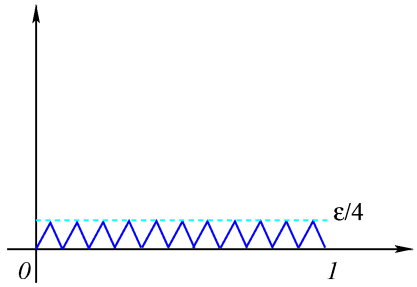


Figura 3.5: La función sierra definida en cada E_n.

3.7. Problemas

Problema 3.1 Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\, a + \frac{1}{q}\, b, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.7.1}$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda**: Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Solución: La función f es continua y derivable en $(0, \infty)$.

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1), \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0.$$

Además $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0$ pues $\alpha \in (0, 1)$. Luego en $x = 1$ f tiene un máximo local. Pero como el único extremo local que tiene la función es éste, y además $f(0) = \alpha - 1 < 0$ y $\lim_{z\to+\infty} f(x) = -\infty$, entonces en $x = 1$ f tiene un máximo absoluto. Además $f(1) = 0$, por tanto, $f(x) \leq 0$ para todo $x > 0$, además la desigualdad es estricta para todo $x > 0$ distinto de 1.

Si elegimos $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$, entonces, el resultado anterior nos conduce a (3.7.1), además la igualdad sólo tiene lugar si $x = 1$, o sea, si $a = b$. ■

Problema 3.2 Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.7.2}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c\, y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Young.

Solución: Si $x_i = y_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que al menos uno de los x_i y de los y_i son distintos de cero. Sea

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i^p > 0, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^q > 0, \quad \text{y} \quad a = \frac{x_i^p}{X}, \qquad b = \frac{y_i^q}{Y}, \qquad p > 1,$$

entonces usando la desigualdad de Young (3.7.1) obtenemos

$$\left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^p}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y},$$

sumando en i desde $i = 1$ hasta $i = n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{Y^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de donde se deduce la desigualdad. Finalmente, la igualdad se obtiene si y sólo si $a/b = 1$, de donde se deduce la proporcionalidad de los valores de x_i^p y y_i^q. ■

Problema 3.3 Prueba la desigualdad de Minkowski (3.1.1) a partir de la desigualdad de Hölder (3.7.2).

Solución: Si $x_i = y_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que al menos uno de los x_i y de los y_i son distintos de cero. Tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)(x_i + y_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

A continuación aplicamos la desigualdad de Hölder a ambos sumandos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde la igualdad tiene lugar si y sólo si $x_i^p = c'(x_i + y_i)^{(p-1)q}$ y $y_i^p = c''(x_i + y_i)^{(p-1)q}$, es decir, si $x_i^p = c'/c'' y_i^p$, o sea si $x_i = c y_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Ahora bien, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $(p-1)q = p$, así pues,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

de donde, dividiendo por $(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ obtenemos el resultado. ■

Problema 3.4 Encontrar los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, con $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$ y probar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Deduce a partir de este resultado las desigualdades análogas a las desigualdades de Young (3.7.1), de Hölder (3.7.2) y Minkowski (3.1.1), respectivamente.

Solución: Este problema es análogo a los problemas 3.1–3.3, simplemente las desigualdades son las contrarias.

Problema 3.5 Extiende a las series infinitas las desigualdades de Hölder

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.7.3}$$

y Minkowski (3.1.3), respectivamente, donde $(x_i)_i$ y $(y_i)_i$ son sucesiones de números no-negativos. Se asume que las sucesiones son tales que las correspondientes series son convergentes.

Solución: Si las series $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p$ y $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^q$ convergen, entonces, de la desigualdad (3.7.2) se tiene que las sumas parciales de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i$ están acotadas y, al ser esta una serie de términos positivos, es convergente (Criterio de comparación de Weierstrass 1.2.8). Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$ en (3.7.2) se tiene (3.7.3). La desigualdad (3.1.3) se sigue de (3.1.1) tomando el límite cuando $n \to \infty$. ■

Problema 3.6 Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$. Usando la desigualdad de Young (3.7.1) prueba las desigualdades de Hölder

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ p > 1, \tag{3.7.4}$$

donde q es tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, y Minkowski

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ p>1.$$

¿Son ciertas estas igualdades si f y g son integrables?

Solución: Sea

$$X=\int_a^b |f(x)|^p dx>0, \ Y=\int_a^b |g(x)|^q dx>0, \ a=\frac{|f(x)|^p}{X}, \ b=\frac{|g(x)|^q}{Y}.$$

Aplicando la desigualdad de Young se sigue que

$$\left(\frac{|f(x)|^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|g(x)|^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{X}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|g(x)|^p}{Y}.$$

Luego, por la monotonía de la integral, tenemos

$$\int_a^b\left(\frac{|f(x)|}{X^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|g(x)|}{Y^{\frac{1}{q}}}\right)dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b\frac{|f(x)|^p}{X}dx+\frac{1}{q}\int_a^b\frac{|g(x)|^q}{Y}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Multiplicando por $X^{1/p}$ e $Y^{1/q}$ obtenemos la desigualdad buscada.

Probemos ahora la desigualdad de Minkowski. Si f o g son idénticamente nulas, entonces la desigualdad es inmediata así que asumiremos que no lo son. Notemos que, para $p>1$,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx &= \int_a^b |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx \leq \\ &\leq \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1}dx = \\ &= \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx+\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder (3.7.4) a los dos miembros de la última igualdad obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx+\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx \leq \\ &\leq \left(\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b |g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}dx\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, se tiene que $(p-1)q=p$, entonces dividiendo la expresión anterior por $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$, y usando que

$$\frac{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx}{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{p}$$

se obtiene el resultado.

Como se ve de la prueba la continuidad de f y g no es necesaria, lo que se necesita es que las funciones f y g y sus correspondientes potencias sean integrables. Está claro que si f y g son continuas son integrables. ■

Problema 3.7 Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente. Prueba que

1. $(x_n)_n$ es acotada.
2. El límite de $(x_n)_n$ es único.
3. Si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$, es decir, la aplicación $\rho : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ es continua. **Ayuda:** Usa que $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$.

Solución: 1. Por la definición de convergencia, sabemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $\rho(x_n, L) < 1$ para todo $n > N$. Además, existe el $\min_{n=1,\ldots,N} \rho(x_n, L) = \delta$. Por tanto, si elegimos $r > \max\{1, \delta\} < +\infty$, tenemos que para todo n, $x_n \in B(L, r)$, la bola centrada en L de radio r, y por tanto está $(x_n)_n$ es acotada.

2. Supongamos que la sucesión admite dos límites distintos $l_1 \leq l_2$. Entonces, por un lado, $d = \rho(l_1, l_2) > 0$, y por otro, como $x_n \to l_1$ y $x_n \to l_2$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ se cumple, al mismo tiempo, que $\|x_n - l_1\| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|x_n - l_2\| < \frac{\epsilon}{2}$, por tanto,

$$\|l_2 - l_1\| \leq \|l_2 - x_n\| + \|x_n - l_1\| < \epsilon \quad \Rightarrow l_1 = l_2.$$

También se puede razonar como sigue: como $x_n \to l_1$ y $x_n \to l_2$, existe (¿por qué?) un N tal que, para todo $n > N$, $x_n \in B(l_1; \frac{d}{3})$ y $x_n \in B(l_2; \frac{d}{3})$ para $n > N$, pero entonces $x_n \in B(l_1; \frac{d}{3}) \bigcap B(l_2; \frac{d}{3}) = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

3. Usando la desigualdad triangular tenemos

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, y) + \rho(y, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n),$$

o sea, $\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n)$. Análogamente

$$\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n).$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n),$$

de donde se sigue el resultado pues $\rho(x_n, x) \to 0$, y $\rho(y_n, y) \to 0$. ■

Problema 3.8 Es conocido que en $\mathbb{R}$ de toda sucesión acotada se puede construir (extraer) una subsucesión convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Sea ahora $\mathbb{X}$ un espacio métrico arbitrario y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de $\mathbb{X}$. ¿Se puede construir (extraer) de $(x_n)_n$ una subsucesión convergente? Justifica la respuesta.

Solución: No necesariamente. Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = (0, 1)$ con la métrica habitual. La sucesión $x_n = 1/n$ es acotada pero no tiene límite en $\mathbb{X}$ y por tanto tampoco tiene límite ninguna de sus subsucesiones. De hecho es suficiente construir una sucesión acotada en $\mathbb{X}$ cuyo límite no pertenezca a $\mathbb{X}$ (como el ejemplo anterior). Puesto que todas las subsucesiones de una sucesión convergente tienen el mismo límite que la propia sucesión, ninguna subsucesión será convergente. Por tanto, la completitud de $\mathbb{X}$ es una condición necesaria. El próximo problema nos muestra que no es suficiente. ■

Problema 3.9 Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{X}$. ¿Se puede extraer de $(x_n)_n$ una subsucesión convergente (es decir, ¿es cierto el Teorema de Bolzano-Weierstrass para los espacios métricos completos?). Justifica tu respuesta. ¿Qué ocurre si $\mathbb{X}$ no es completo?

Solución: Si $\mathbb{X}$ no es completo, ver ejercicio 3.8, donde vimos que la completitud era, en general, una condición necesaria. Supongamos que $\mathbb{X}$ es completo. Mostremos que tampoco es suficiente. Sea ℓ^∞ el espacio de las sucesiones acotadas con la métrica del supremo (ver Ejemplo 3.1.11). Este espacio es completo (ver problema 3.13). Escojamos la sucesión $x^{(k)} = e_k$, donde e_k es la sucesión cuyos términos son todos nulos excepto en k-ésimo que tomamos igual a 1. Está claro

que la sucesión $\|x^{(k)}\| = 1$ para todo k, luego es acotada. Además, para todos $n \neq m \in \mathbb{N}$ $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = 1$, por tanto de dicha sucesión no podemos extraer ninguna subsucesión convergente. Este ejemplo también nos vale si en vez de usar ℓ^∞ usamos ℓ^2 como espacio métrico completo. ■

Problema 3.10 Sea $(x_n)_n$ una sucesión fundamental (de Cauchy) de elementos de un espacio métrico $\mathbb{X}$.

1. Prueba que $(x_n)_n$ es acotada.
2. Sea $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$. Prueba que si $(x_{n_k})_k$ converge a x, entonces $(x_n)_n$ también converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Solución: Sea una sucesión de Cauchy $(x_n)_n \in \mathbb{X}$. Entonces,

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n, m > N,\ \rho(x_n, x_m) < \epsilon. \tag{3.7.5}$$

1. Tomando $\epsilon = 1$ en (3.7.5) se tiene que para todo $n > N$, $\rho(x_n, x_N) \leq 1$. Razonando como en el punto 1 del problema 3.7 se tiene el resultado.

2. Sea $(x_{n_k})_k$ la subsucesión convergente a $x \in \mathbb{X}$. Entonces, por un lado que $x_{n_k} \to x$ si $k \to \infty$, luego existe $N > 0$ tal que $\rho(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ si $n_k > N$, y, por el otro, como, para todo $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$, tenemos por (3.7.5) que para $k > N$ (que podemos tomar sin pérdida de generalidad igual que el N anterior) que $\rho(x_k, x_{n_k}) < \epsilon/2$. Pero entonces, para $k > N$

$$\rho(x_k, x) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \epsilon,$$

de donde se sigue el resultado. ■

Problema 3.11 Prueba que el espacio métrico trivial del ejemplo 3.1.2 es completo.

Solución: Sea $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ una sucesión de Cauchy del espacio métrico trivial del ejemplo 3.1.2. Entonces se tiene (3.7.5). Eligiendo $\epsilon < 1$ cualquiera tenemos, por la definición de la métrica trivial, que $\forall\, n, m > N$, $\rho(x_n, x_m) = 0$, luego $\forall\, n, m > N$, $x_n = x_m$. Es decir, las únicas sucesiones de Cauchy de $\mathbb{X}$ son las que son constantes a partir de cierto N, es decir, $x_n = x_{N+1}$ $\forall n > N$. Luego, todas las sucesiones de Cauchy son convergentes y su límite es $x_{N+1} \in \mathbb{X}$ de dondes se sigue la completitud del espacio métrico trivial. ■

Problema 3.12 Prueba que los espacios métricos de los ejemplos 3.1.5–3.1.7 son completos. ¿Y el del ejemplo 3.1.8?

Solución: Vamos a probar que $\mathbb{R}^n_p$, $p \geq 1$ es completo de donde se sigue el resultado para los ejemplos 3.1.5-3.1.6. La prueba es esencialmente la misma que la del Ejemplo 3.5.15 así que solo daremos un esbozo de la misma.

Sea $x^{(k)} := (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ una sucesión de Cauchy. Entonces, cualquiera sea $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}|^p < \epsilon^p, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.7.6}$$

con tal que k sea lo suficientemente grande. Pero entonces como todos los sumandos son positivos, podemos asegurar que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $|x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}| < \epsilon$, y k suficientemente grande. Es decir, cada una de las sucesiones reales $x_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es de Cauchy. Pero $\mathbb{R}$ es un espacio completo por lo que existe $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ para cada i. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Como $x_i^{(k)}$ converge a x_i para cada i, tomando el límite cuando $m \to \infty$ en (3.7.6) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|^p \leq \epsilon^p,$$

i.e, $\rho(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$, si n es suficientemente grande. Luego hemos probado que $x^{(k)}$ converge a x y como $x^{(k)}$ era una sucesión fundamental arbitraria, se sigue que $\mathbb{R}^n_p$ es completo.

Para el ejemplo 3.1.8, i.e., para $\mathbb{R}^n_\infty$ el razonamiento es similar. De hecho, la completitud para todos estos espacios se sigue del teorema 4.3.2 que probaremos en el próximo capítulo. ■

Problema 3.13 Prueba que el espacio métrico ℓ^∞ del ejemplo 3.1.11 es completo.

Solución: $x^{(k)} := (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$ una sucesión de Cauchy. Usamos (3.7.5) que, en nuestro caso, implica que $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}| < \epsilon$, luego $\forall i \in \mathbb{N}$, $|x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}| < \epsilon$, i.e., cada una de las sucesiones $x_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es de Cauchy. Pero $\mathbb{R}$ es un espacio completo por lo que existe $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ para cada i. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Probemos que $x \in \ell^\infty$. Para ello notemos que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(k)}| + |x_i^{(k)}|,$$

pero para cada $i \in \mathbb{N}$, $(x_i^{(k)})$ es de Cauchy, luego es acotada, y si elegimos k suficientemente grande, podemos hacer $|x_i - x_i^{(k)}|$ suficientemente pequeño, luego $(x_i)_i$ es una sucesión acotada, luego $x \in \ell^\infty$. Finalmente, como para todo $i \in \mathbb{N}$, $|x_i - x_i^{(k)}|$ es suficientemente pequeño, entonces $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - x_i^{(k)}|$, también lo es, luego $x^{(k)} \to x$. Como $x^{(k)}$ era una sucesión arbitraria de Cauchy, ℓ^∞ es completo. ■

Problema 3.14 Prueba que los espacios métricos definidos en el ejemplo 3.1.5–3.1.7 y 3.1.12 son separables. **Ayuda**: Usa los subespacios definidos mediante los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $q_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ para los espacios de los ejemplos 3.1.5–3.1.7 y los subespacios definidos por los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en el espacio del ejemplo 3.1.12 ($p \geq 1$) y prueba que son numerables y densos en los correspondientes espacios métricos.

Solución: Como en el problema 3.12 es suficiente con probarlo para $\mathbb{R}_p^n$, $p \geq 1$. Sean los vectores $y = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $q_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, ..., n$. Como la unión finita de conjuntos numerables es numerable, y $\mathbb{Q}$ es numerable, el conjunto Y de todos los y anteriores es numerable. Probemos que Y es denso en $\mathbb{R}_p^n$. Puesto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces, para todo $x_i \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, existe un $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x_i - q_i| < \left(\frac{\epsilon^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Por tanto, para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_p^n$ existe un $q = (q_1, ..., q_n) \in Y$ tal que

$$\rho(x, q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^p\right)^{1/p} < (\epsilon^p)^{1/p} \leq \epsilon.$$

Es decir, Y es denso en $\mathbb{R}_p^n$, luego $\mathbb{R}_p^n$ es separable.

El caso de ℓ^p es totalmente análogo al caso especial de ℓ^2 discutido en el ejemplo 3.4.5. ■

Problema 3.15 Prueba que el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica discreta (ver ejemplo 3.1.2) no es separable.

Solución: Supongamos que existe un conjunto $M \subset \mathbb{R}$ denso en $\mathbb{R}$. Como $\overline{M} = \mathbb{R}$, entonces todo $x \in \mathbb{R}$ es punto límite de M, luego existe una sucesión $(x_n)_n \in M$ tal que $x_n \to x$. Pero las únicas sucesiones que convergen en nuestro espacio son las que son constantes a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$ (pues estamos tomando la métrica discreta), lo cual implica que $x \in M$. Luego, si M es denso, M no puede ser numerable y por tanto nuestro espacio no puede ser separable. ■

Problema 3.16 Prueba que el espacio métrico definido en el ejemplo 3.1.13 es separable y completo.

Solución: Sea $\mathbb{X}$ el espacio de las sucesiones reales con la métrica

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}. \tag{3.7.7}$$

En primer lugar, como la función $f(x) = x/1 + x \leq 1$ para todo $x \geq 0$, tenemos que

$$\frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \leq \frac{1}{2^j} = M_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} M_j = 1 < \infty.$$

Por tanto, por el criterio de comparación de Weierstrass 1.2.8 tenemos que la serie anterior es convergente cualquiera sea la sucesión $(x_n)_n$ que escojamos.

Esta claro que $\rho(x,y) \geq 0$ y solo es cero si $x = y$. Además $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Además $f(x)$ es creciente para $x \geq 0$, luego, $f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$ y, por tanto, tomando $a = x_j - y_j$ y $b = y_j - z_j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - z_j|}{1 + |x_j - z_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j + y_j - z_j|}{1 + |x_j - y_j + y_j - z_j|} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j| + |y_j - z_j|}{1 + |x_j - y_j| + |y_j - z_j|} = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j| + |y_j - z_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|y_j - z_j|}{1 + |x_j - y_j| + |y_j - z_j|} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|y_j - z_j|}{1 + |y_j - z_j|} = \rho(x,y) + \rho(y,z).
\end{aligned}$$

Luego la función (3.7.7) es efectivamente una métrica y nuestro espacio es un espacio métrico.

Probemos que $\mathbb{X}$ es completo. Sea $(x^{(n)})_n \in \mathbb{X}$ una sucesión de Cauchy. Entonces (3.7.5) implica que para todo $\epsilon' > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$,

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|}{1 + |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|} < \epsilon'. \tag{3.7.8}$$

Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo y cualquiera sea $\epsilon > 0$, tenemos[16], para todos $n, m > N$,

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|}{1 + |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|} < \frac{1}{2^k}\frac{\epsilon}{1+\epsilon},$$

donde hemos elegido $\epsilon' = \frac{1}{2^k}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ en (3.7.8). Como f es estrictamente creciente para $x > 0$ lo anterior implica que luego, para todo $j \in \mathbb{N}$, $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Es decir, para cada $j \in \mathbb{N}$, las sucesiones $(x_j^{(n)})_n \in \mathbb{R}$ son de Cauchy y como $\mathbb{R}$ es completo, son convergentes. Sea $x_j^{(n)} \to x_j$ cuando $n \to \infty$. Está claro que $x \in \mathbb{X}$. Tomando el límite $m \to \infty$ en (3.7.8) y usando que la métrica es una aplicación continua tenemos que $\rho(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$ si n es lo suficientemente grande, luego $x^{(n)} \to x \in \mathbb{X}$, y como $(x^{(n)})_n$ era arbitraria, $\mathbb{X}$ es completo.

Veamos ahora que es separable. Para ello definiremos el conjunto $Q \subset \mathbb{X}$ de todas las sucesiones del tipo $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde para todo k, q_k es racional (ver el ejemplo 3.4.5)). Como ya vimos Q es un subespacio numerable. Probemos que Q es denso en $\mathbb{X}$. Sea una sucesión cualquiera $(x_n)_n \in \mathbb{X}$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j|}{1 + |x_j|} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces para todo x_k existe un racional q_k tan cerca como se quiera, i.e., para todo $\epsilon > 0$ y todo k, $|x_k - q_k| < \epsilon/(2N)$. Luego existe una sucesión $q \in Q$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, para todo $x \in \mathbb{X}$ podemos encontrar un $q \in Q$ tal que

$$\rho(x, q) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j - q_j|}{1 + |x_j - q_j|} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j|}{1 + |x_j|} < \epsilon,$$

i.e., para todo $x \in \mathbb{X}$, existe un $q \in Q$ tal que $\rho(x, q) < \epsilon$, luego Q es denso en $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ contiene un subconjunto denso y numerable entonces es separable. ■

[16] De hecho, de esta misma forma se puede probar que $\rho(x, y)$ es suficientemente pequeño si y solo si $|x_i - y_i|$ es suficientemente pequeño para cada i, donde $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$.

Problema 3.17 Sea $B(a,b)$ el conjunto de todas las funciones acotadas (no necesariamente continuas) en $[a,b]$. Prueba que $B(a,b)$ es un espacio métrico con la métrica $\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Prueba que dicho espacio no es separable. **Ayuda:** Sea el conjunto de todas las funciones $f_t(x) = 0$ para $0 \leq x < t$ y $f_t(x) = 1$ para $t \leq x \leq b$, $t \in [a,b]$. Prueba que dicho conjunto no es numerable. Calcula la distancia entre dos funciones cualesquiera de dicho conjunto y razona como en el Ejemplo 3.4.6.

Solución: Probar que el espacio $B(a,b)$ es métrico es similar al caso del ejemplo 3.1.10. Sea A el conjunto de de todas las funciones $f_t(x) = 0$ para $0 \leq x < t$ y $f_t(x) = 1$ para $t \leq x \leq b$, $t \in [a,b]$. Está claro que hay una función f_t para cada $t \in [a,b]$, luego A es no numerable pues pues $[a,b]$ no es numerable. Además, la distancia entre cualesquiera dos funciones distintas del conjunto A es 1, por tanto, razonando como en el ejemplo 3.4.6 podemos construir un conjunto de bolas centradas en cada f_t y disjuntas entre sí. Sea M cualquier conjunto denso en $B(a,b)$. Entonces, en cada una de las bolas anteriores debe haber al menos un elemento de M, luego M no es numerable (el conjunto de las bolas no lo es) y como M era arbitrario, entonces ℓ^∞ no tiene ningún conjunto numerable denso, así que $B(a,b)$ tampoco lo es y por tanto $B(a,b)$ no puede ser separable. ■

Problema 3.18 Estudia bajo que condiciones (sobre los $a_{i,j}$) la aplicación $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por el sistema de ecuaciones

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

es de contracción en los siguientes casos

1. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.5.

2. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.6

3. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.8

Solución: En el segundo caso tenemos $\mathbb{R}^n_1$:

$$\begin{aligned}\rho(Ax,Ay) &= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + b_j\right| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x_j - y_j)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \operatorname*{máx}_{j=1,\ldots,n} |a_{ij}||x_j - y_j| = \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname*{máx}_{j=1,\ldots,n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = \alpha \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = \alpha\rho(x,y).\end{aligned}$$

Luego A será contractiva si $\alpha = \sum_{i=1}^n \operatorname{máx}_{j=1,\ldots,n} |a_{ij}| < 1$.

Para el tercer caso

$$\begin{aligned}\rho(Ax,Ay) &= \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + b_j\right| = \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right| \leq \\ &\leq \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j - y_j| \leq \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n \operatorname*{máx}_{j=1,..n} |a_{ij}||x_j - y_j| = \\ &= \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \operatorname*{máx}_{j=1,..,n} |a_{i,j}||x_j - y_j|\, n = \alpha \operatorname*{máx}_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j| = \alpha\rho(x,y).\end{aligned}$$

Luego, A será contractiva si

$$\alpha = n \operatorname*{máx}_{i,j=1,\ldots,n} |a_{i,j}| < 1 \Leftrightarrow \operatorname*{máx}_{i,j=1,\ldots,n} |a_{i,j}| < \frac{1}{n}.$$

Finalmente, en el primer caso se puede comprobar que

$$\rho(Ax,Ay) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}\rho(x,y),$$

así que si, $\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} < 1$, nuestra aplicación es contractiva. No obstante debemos mencionar que si A es una matriz simétrica el resultado anterior se puede mejorar usando el *Teorema espectral* para matrices simétricas. ■

Problema 3.19 Utiliza el Teorema del punto fijo para probar que el problema de valores iniciales asociado al sistema de ecuaciones diferenciales

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), i = 1, \ldots, n,\ \ y_1(x_0) = (y_1)_0, \ldots, y_n(x_0) = (y_n)_0,$$

tiene solución única en cierto δ-entorno de x_0. Asumir que las funciones f_i son continuas en cierta región Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene al punto $(x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$, y que se satisfacen una condición de Lipschitz de la forma

$$\exists K > 0;\ \forall x, y_i, \tilde{y}_i \in \Omega,\ |f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)| \leq K \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - \tilde{y}_i|.$$

Solución: La prueba consiste en adaptar la prueba del Teorema de Picard 3.5.34 para una ecuación a un sistema de ecuaciones.

Problema 3.20 Sea la ecuación integral de Fredholm de 2º tipo

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x),$$

donde el *núcleo* $K(x, y)$ de la ecuación integral y g son funciones conocidas y continuas en el cuadrado definido por las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$. Prueba que en el espacio $C([a, b])$ con la métrica $\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ (ver ejemplo 3.1.9) la ecuación anterior tiene una única solución si $|\lambda| < (M(b - a))^{-1}$, donde M es el máximo de la función $K(x, y)$. **Ayuda:** Utiliza el Teorema del punto fijo.

Solución: Sea el operador $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$, definido por

$$Tf(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x).$$

Tomemos en $C([a, b])$ la norma del máximo (supremo) de forma que tenemos el espacio métrico completo $C^\infty([a, b])$. Calculamos

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tg(x)| &= \left| \lambda \int_a^b K(x, y)(f(y) - g(y)) dy \right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, y)||f(y) - g(y)| dy \\
&\leq |\lambda| \int_a^b M \cdot \max_{y \in [a,b]} |f(y) - g(y)| dy \\
&= |\lambda| M(b - a) \max_{y \in [a,b]} |f(y) - g(y)|,
\end{aligned}$$

donde $M = \max_{x,y \in [a,b]} |K(x, y)|$. Luego

$$\max_{x \in [a,b]} |Tf(x) - Tg(x)| \leq |\lambda| M(b - a) \max_{y \in [a,b]} |f(y) - g(y)| \Rightarrow$$

$$\rho(Tf, Tg) \leq |\lambda| M(b-a)\rho(f,g) = \alpha\rho(f,g), \quad \alpha = |\lambda| M(b-a).$$

Si $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$, entonces $\alpha \in (0,1)$ y, por tanto, T es un operador de contracción en un espacio métrico completo, luego podemos aplicar el teorema de punto fijo de Banach 3.5.29 que nos asegura que existe una única función f^* tal que $Tf^* = f^*$, i.e.,

$$f^*(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f^*(y) dy + g(x),$$

por lo que existe una única solución a la ecuación integral de Fredholm. ■

Problema 3.21 Prueba que la función $f(x)$ definida sobre $(0,1)$ tal que $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ (fracción reducida) e igual a 0 si x es irracional es continua en cada irracional de $(0,1)$ y discontinua en cada racional de $(0,1)$.

Solución: La función propuesta se conoce como función de Thomae: $f : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ y mcd}(p,q) = 1 \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Estudiemos ahora su continuidad: Sea $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, coprimos. Luego $f(x_0) = \frac{1}{q}$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, arbitrario. Definimos $x_n = x_0 + \dfrac{\alpha}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|x_0 - x_n| = \frac{\alpha}{n}, \text{ y } \quad |f(x_0) - f(x_n)| = \frac{1}{q}.$$

Luego $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) \not\to f(x_0)$, y, por tanto, f no es continua en ningún racional.

Veamos ahora la continuidad en los irracionales. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, $i \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, cualquiera. Por la propiedad arquimediana, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/r < \varepsilon$, y existen $k_i \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall\, i = 1, ..., r \text{ es } 0 < \frac{k_i}{i} < x_0 < \frac{k_i + 1}{i}$$

Ahora definimos la mínima distancia de x_0 a sus i-ésimas cotas como:

$$d_i := \text{mín}\left\{ \left| x_0 - \frac{k_i}{i} \right|, \left| x_0 - \frac{k_i + 1}{i} \right| \right\}, \quad \text{y sea} \quad \delta = \min_{1 \leq i \leq r} \{d_i\}$$

Elijamos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Si x es irracional, entonces $f(x_0) = f(x) = 0$. Si x es racional con fracción irreducible p/q, necesariamente ha de ser $q > r$, y por tanto:

$$|f(x_0) - f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \varepsilon$$

Así concluimos que f es continua en los irracionales.

Problema 3.22 El Teorema de Baire 3.6.1 se puede probar a partir del Teorema de las esferas encajadas 3.5.19 para ello hay que una sucesión apropiada de esferas encajadas. Ello se puede hacer razonando de la misma forma que en la prueba presentada en el apartado 3.6 y mostrado que existe una esfera S_k tal que $S_k \subset B_k$ pero que no está contenida en B_{k+1}. Usar esta idea para dar una prueba alternativa del Teorema de Baire 3.6.1.

Capítulo 4

Espacios normados y espacios de Banach

4.1. Espacios vectoriales

Definición 4.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un conjunto de elementos cualesquiera y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. Definiremos en $\mathbb{V}$ las operaciones* suma "+" *de dos elementos x, y de $\mathbb{V}$ y* multiplicación "$\cdot$" *de un elemento de $\mathbb{V}$ por un número (real o complejo) $\alpha \in \mathbb{K}$ por un elemento de $\mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (real o complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respectivamente), si se cumplen las siguientes propiedades (axiomas):*

1. *Para todos x e y,* vectores *de $\mathbb{V}$, el vector suma, $w = x + y$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y, z \in \mathbb{V}$ se cumple que:*

   a) $x + y = y + x$

   b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

   c) *Existe un elemento "nulo" de $\mathbb{V}$, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*

   d) *Cualquiera sea el vector x de $\mathbb{V}$, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

2. *Para todo x* vector *de $\mathbb{V}$, el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar, $w = \alpha \cdot x$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple que:*

   a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

d) $1 \cdot x = x$

Ejemplos.

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

2. El conjunto de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^{m\times n}$.

3. El conjunto de los polinomios reales[1] de grado a lo sumo n, que denotaremos por $\mathbb{P}_n$, o sea,

$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad a_0, ..., a_n \text{ números reales.}\},$$

donde definiremos la suma de dos polinomios y la multiplicación por un escalar de la siguiente forma:

$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad q(x) = b_0 + b_1\, t + \cdots + b_n\, t^n,$$

$$(p+q)(t) := p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

$$(\alpha \cdot p)(t) := \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

4. El conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $C([a, b])$, cuando la suma de dos funciones f y g y la multiplicación por un escalar α están dadas por

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad (\alpha \cdot f)(t) := \alpha \cdot f(t).$$

Definición 4.1.2 *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto $H \subset \mathbb{V}$ de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones* suma "+" *y* multiplicación "$\cdot$" *que* $\mathbb{V}$.

[1] De forma totalmente análoga se puede definir para el caso complejo.

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = \mathbb{V}$ (el mismo espacio vectorial).

2. Para $\mathbb{V} = C([a, b])$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, ...$ entero no negativo.

3. Para $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Ejercicio 4.1.3 *Prueba que los espacio ℓ^∞ y ℓ^p ($p \geq 1$) de los ejemplos 3.1.11 y 3.1.12, respectivamente, son espacios vectoriales.*

Que la suma $x + y \in \ell^\infty$ es inmediato. Para el caso de ℓ^p se sigue de la desigualdad de Minkowski (3.1.3). Para la multiplicación por un escalar es inmediato. Finalmente, se puede comprobar mediante un cálculo directo que en cada caso se cumplen las propiedades de la definición 4.1.1. ■

Teorema 4.1.4 *Un subconjunto H de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si y sólo si se cumple*[2] *que para todos x e y,* vectores *de H y α, $\beta \in \mathbb{K}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

La demostración es inmediata de la definición de subespacio vectorial.

Definamos ahora la envoltura lineal $\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p)$ de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores:

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k \;\middle|\; \alpha_k \in \mathbb{K},\ k = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Usando el teorema anterior se deduce el siguiente

Teorema 4.1.5 *Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el conjunto $\operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_p)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$. Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.*

[2] Usualmente se impone además que el elemento nulo de $\mathbb{V}$ pertenezca a H, pero eso se deduce de la condición $w = \alpha x + \beta y \in H$ tomando $\alpha = \beta = 0$.

Conjuntos linealmente independientes. Bases.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se denomina linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0,$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ se denomina linealmente dependiente si existen los valores $x_1, x_2, \cdots, x_p$ no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Se dice que un conjunto infinito de vectores es linealmente independiente si cualquier subsistema finito del mismo es linealmente independiente. En caso contrario se dice que el sistema es dependiente.

Las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

1. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*

2. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores de $\mathbb{V}$ con alguno de los vectores $v_i = 0$ $(1 \leq i \leq p)$ es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes, o sea si alguno de los vectores de S es el vector nulo entonces S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

3. *Dos vectores v_1 y v_2 de $\mathbb{V}$ son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real α tal que $v_1 = \alpha v_2$ o $v_2 = \alpha v_1$*

Los vectores linealmente independientes de un espacio vectorial juegan un papel fundamental en el estudio de los sistemas lineales gracias a la siguiente definición:

Definición 4.1.6 *Dado un subespacio vectorial H del espacio vectorial $\mathbb{V}$ diremos que el conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de $\mathbb{V}$ es una base de H si*

i) B *es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) $H = \operatorname{span}(b_1, b_2, ..., b_p)$*, o sea,* B *genera a todo* H*.*

En particular si H *coincide con* $\mathbb{V}$*, entonces* B *es una base de todo el espacio vectorial* $\mathbb{V}$*.*

Por ejemplo, si tomamos una matriz $n \times n$ invertible, entonces sus columnas $a_1, ..., a_n$ son linealmente independientes y además se tiene que $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. En particular, si $A = I_n$, la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son una base de $\mathbb{R}^n$ la cual se conoce como base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Otro ejemplo lo constituye el conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$. Es fácil comprobar que dichos vectores son linealmente independientes y que $\operatorname{span}(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. S se conoce como la base canónica de $\mathbb{P}_n$.

El siguiente teorema es de gran importancia en las aplicaciones.

Teorema 4.1.7 *Si un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *tiene una base de* n *vectores* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$*, entonces cualquier conjunto con más de* n *vectores de* $\mathbb{V}$ *es linealmente dependiente. Más aún, si un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *tiene una base de* n *vectores* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$*, entonces cualquier otra base de* $\mathbb{V}$ *tendrá que tener* n *vectores de* $\mathbb{V}$*.*

Por tanto el menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio. Dicho número se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Un espacio vectorial es de dimensión finita n si $\mathbb{V}$ está generado por una base de n elementos, es decir si $\mathbb{V} = \operatorname{span}(b_1, ..., b_n)$, donde $B = \{b_1, ..., b_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y lo escribiremos de la forma $\dim V = n$. En el caso que $\mathbb{V} = \{0\}$ sea el espacio vectorial nulo, $\dim\{0\} = 0$. Si $\mathbb{V}$ no puede ser generado por una base finita de vectores, entonces diremos que $\mathbb{V}$ es de dimensión infinita y lo denotaremos por $\dim V = \infty$.

Por ejemplo, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, $\dim C([a, b]) = \infty$ y $\dim \ell^p = \infty$.

4.2. Espacios normados y de Banach

Definición 4.2.1 *Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. *Para todo $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ y si $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,*
3. *Para todos $x, y \in \mathbb{X}$ se tiene la desigualdad triangular*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{4.2.1}$$

Es evidente que si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos la función $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta satisface los axiomas de la definición 3.1.1, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. La función ρ anterior se denomina métrica inducida por la norma.

Definición 4.2.2 *Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.*

Ejemplo 4.2.3 *$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.*

Ejercicio 4.2.4 *¿Qué ocurre con $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) si usamos las normas $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$? ¿Y con la norma $\|x\| = \operatorname{máx}_{k=1,\ldots,n} |x_k|$?*

En ambos casos los correspondientes espacios son de Banach. ■

Ejemplo 4.2.5 *Sea $\mathbb{X} = C([a, b])$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$ y definamos la norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Este espacio es un espacio normado pero no de Banach (¿por qué?).*

Ejemplo 4.2.6 *Sea $\mathbb{X} = C([a, b])$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$. Definamos la norma $\|f\| = \operatorname{máx}_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplo 4.2.7 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ reales (o complejas) tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ con la norma $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. Dicho espacio lo denotaremos por ℓ^p y es un espacio de Banach.*

Ejercicio 4.2.8 *Decide si el espacio $\mathbb{X}$ de todas las sucesiones reales $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ acotadas con la métrica $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, es un espacio de Banach (ver el problema 3.13).*

Esta claro que todo espacio normado es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma. Una pregunta inmediata es si el recíproco es cierto, es decir, si todo espacio métrico es normado. Para responder a esta pregunta consideremos el espacio $\mathbb{X}$ de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con la métrica (ver ejemplo 3.1.13)

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Esta métrica no puede ser inducida por ninguna norma ya que de ella nunca podremos obtener la propiedad 2 de la norma. Una forma de verlo es a partir del siguiente lema (cuya demostración es inmediata a partir de la definición de norma):

Lema 4.2.9 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones*

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Los espacios normados son espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ y or tanto en ellos podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.. Además, al tener una estructura algebraica podemos definir, entre otras cosas, las series:

Definición 4.2.10 *Dada una sucesión de elementos $(x_n)_n$ de un espacio normado $\mathbb{X}$ definiremos la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si s_n converge (en norma) a cierto $s \in \mathbb{X}$, cuando $n \to \infty$, diremos que la serie es convergente en $\mathbb{X}$ y s es su suma. Si converge la serie $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$, diremos que la serie converge absolutamente.

Teorema 4.2.11 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración: Sea $(x_n)_n$ absolutamente convergente, i.e., la serie ***numérica*** $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. Entonces, obviamente $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o equivalentemente, su sucesión de sumas parciales $(\tilde{s}_n)_n$ es de Cauchy, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N},\ |\tilde{s}_{n+p} - \tilde{s}_n| = \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \epsilon.$$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\|s_n - s_{n+p}\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_n \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_n\| < \epsilon,$$

es decir, la sucesión $(s_n)_n$ de las sumas parciales es fundamental. Como $\mathbb{X}$ es completo, entonces existe un $s \in \mathbb{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. ■

El teorema anterior no es cierto si $\mathbb{X}$ no es completo. Como ejercicio se proponemos al lector que encuentre un contraejemplo.

Ejemplo 4.2.12 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.*

Si $\mathbb{X}$ es completo se sigue del teorema anterior que si la serie es absolutamente convergente es convergente. Probemos el recíproco, i.e., asumamos que toda serie absolutamente convergente es convergente. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy cualquiera, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - x_{n+p}\| < \epsilon.$$

Entonces, existe (¿por qué?) una sucesión creciente de números naturales $(n_k)_k$ tales que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Además, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$, converge a cierto $x \in \mathbb{X}$. Pero esta serie es una serie telescópica y obviamente

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - x_{n_1} = x - x_{n_1},$$

luego la sucesión $(x_{n_k})_k$ es convergente, pero entonces la sucesión original $(x_n)_n$ también converge (ver el punto 2 del problema 3.10). Como $(x_n)_n$ era una sucesión arbitraria de Cauchy, entonces $\mathbb{X}$ es completo. ■

Definición 4.2.13 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.*

Definición 4.2.14 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.*

Ejemplo 4.2.15 *Sea $\mathbb{X}$ el espacio ℓ^p de las sucesiones y sea $(e_n)_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de ℓ^p con 1 en la posición k y 0 en el resto. Probemos que dicha sucesión es una base de Schauder.*

En efecto, para todo $x \in \ell^p$ tenemos $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Como $x \in \ell^p$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Proposición 4.2.16 *Si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.*

Demostración: Por simplicidad asumiremos el caso real. i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (el caso complejo se deja como ejercicio). Sea $(e_n)_n$ una base de Schauder en $\mathbb{X}$ y sea el conjunto

$$Y = \left\{ y = \sum_{j=1}^{N} \beta_j e_j, \;\; N \in \mathbb{N}, \;\; \beta_i \in \mathbb{Q}, \;\; j = 1, 2, \ldots, N \right\},$$

i.e., el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales de elementos de la base $(e_n)_n$. Obviamente Y es numerable (pues $\mathbb{Q}$ lo es). Sea $x \in \mathbb{X}$ cualquiera y sea $\epsilon > 0$. Como $(e_n)_n$ es una base de Schauder entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tales que $\|x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j\| < \epsilon/2$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces existen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N \in \mathbb{Q}$ tales que $|\alpha_j - \beta_j| < \epsilon/(2N\|e_j\|)$.

Entonces, para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un $y = \sum_{j=1}^{N} \beta_j e_j \in Y$, tal que

$$\begin{aligned}
\|x - y\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \beta_j e_j \right\| &= \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j - \beta_j) e_j \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j - \beta_j) e_j \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \right\| + \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j - \beta_j| \|e_j\| < \epsilon
\end{aligned}$$

■

El recíproco no es cierto en general. Enflo en 1973 encontró un espacio de Banach, separable que no tiene ninguna base de Schauder.

Finalmente debemos mencionar que todo espacio normado se puede completar y convertirlo en un espacio de Banach. De hecho como consecuencia directa del Teorema 3.5.25 se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.2.17 *Sea $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{X}}$ y una isometría A de $\mathbb{X}$ en $W \subset \widehat{\mathbb{X}}$, tal que W es denso en $\widehat{\mathbb{X}}$. Además, $\widehat{\mathbb{X}}$ es único excepto isometrías.*

4.3. Espacios normados de dimensión finita

Comenzaremos con un lema técnico.

Lema 4.3.1 *Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{4.3.1}$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo por s 4.3.1 se sigue que 4.3.1 es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

Supongamos que la desigualdad anterior es falsa. Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \qquad \sum_{k=1}^n |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^n |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas. Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$. Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, con las subsucesiones definidas por los índices m_j de antes. Entonces la sucesión $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por Bolzano-Weierstrass de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos por esta sucesión, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?). Continuando este proceso n veces tenemos que existe una subsucesión de índices l_i tales que $\beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$ para todos los $k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ tal que

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^n \beta_k^{(l_i)} x_k, \qquad \beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k.$$

Luego

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k := y \;\text{ y }\; \sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1.$$

De lo anterior se sigue que no todos los β_k pueden ser ceros al mismo tiempo. Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes entonces $y \neq 0$ (¿por qué?). Ahora bien, como la norma es una aplicación continua (ver problema 4.2), entonces se tiene

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\|,$$

pero como $\|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción. ■

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema 4.3.2 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.*

Demostración: Sea $(y_m)_m$ una sucesión de Cauchy arbitraria de M. Sea $\dim M = n$. Entonces para todo $y_m \in M$, existen los números (únicos) $\alpha_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tales que $y_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} e_k$. Como $(y_m)_m$ es de Cauchy, entonces, por un lado

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ |\ \forall m > N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|y_m - y_{m+p}\| < \epsilon,$$

y por el otro, existe un $c > 0$ (por el lema anterior) tal que

$$\epsilon > \left\| \sum_{k=1}^n (\alpha_k^{(m)} - \alpha_k^{(m+p)}) e_k \right\| \geq c \sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(m)} - \alpha_k^{(m+p)}| \Rightarrow \sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(m)} - \alpha_k^{(m+p)}| \leq \frac{\epsilon}{c},$$

i.e., las sucesiones $(\alpha_k^{(m)})_m$ son de Cauchy, y por tanto convergen (los $\alpha_k^{(m)}$ son números reales o complejos), a ciertos α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea $y = \sum_{k=1}^n \alpha_j e_j \in M$. Entonces

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{k=1}^n (\alpha_k^{(m)} - \alpha_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(m)} - \alpha_k| \|e_k\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que implica que $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y \in M$, i.e., M es completo. ■

Corolario 4.3.3 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio de normado (en particular de Banach) $\mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Demostración: M es en sí mismo un espacio normado y por hipótesis es de dimensión finita, luego, por el teorema 4.3.2, es completo. Pero como $M \subset M$, es a su vez es un subespacio de de sí mismo, luego por el teorema 3.5.14 es cerrado. ■

Ejemplo 4.3.4 *Sean los vectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio normado y sea $M = \operatorname{span}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Dado que $M \subset \mathbb{X}$ es de dimensión finita, el corolario anterior 4.3.3 implica que es cerrado. Veamos que la condición de dimensión finita es esencial. Para ello consideremos el espacio $C_\infty([0,1])$ del ejemplo 4.2.6 y sea $M = \operatorname{span}(x_1, x_2, x_2, \cdots)$, donde $x_n := x_n(t) = t^{n-1}$, i.e., M es el espacio de todos los polinomios de cualquier grado. M no puede ser cerrado pues hay infinidad de funciones continuas que son puntos de acumulación de M pero no pertenecen a M. Por ejemplo, si elegimos $f(t) = e^t$, entonces, usando el Teorema de Taylor tenemos que $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!}$, es tal que*

$$\|e^t - P_n(t)\| = \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]} |e^t - P_n(t)| = \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]} \left| \frac{e^\xi t^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \to 0,\ \xi \in (0,1),$$

cuando $n \to \infty$, luego e^t es un punto de acumulación de M pero obviamente no es un polinomio, luego M no puede ser cerrado.

Definición 4.3.5 *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|'$ si existen dos números reales a, b positivos ($a > 0$, $b > 0$) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Ejercicio 4.3.6 *Prueba que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa. ¿Qué consecuencia tiene esta propiedad?*

Esto es una consecuencia inmediata de la definición anterior. Nótese que ello implica que las distintas definiciones que involucran la norma no se ven afectadas si cambiamos una norma por otra equivalente, por ejemplo las sucesiones de Cauchy seguirán siendo de Cauchy, las propiedades topológicas de los espacios y sus subespacios no cambian, etc. ■

Teorema 4.3.7 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$.*

Es decir, en cualquier espacio normado de dimensión finita la convergencia (o divergencia) de sucesiones es independiente de la norma.

Demostración: Sea $\dim \mathbb{X} = n$ y sea $e_1, \ldots, e_n$ una base de $\mathbb{X}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{X}$ existen (y son únicos) los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Entonces, por el lema 4.3.1

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \quad \Rightarrow |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leq \frac{\|x\|}{c}.$$

Pero

$$\|x\|' = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|' \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\|' \leq \operatorname*{máx}_j \|e_j\|' \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq \frac{k}{c} \|x\|,$$

donde hemos denotado por k al $\operatorname{máx}_j \|e_j\|$. Intercambiando las normas obtenemos $\|x\| \leq \frac{k'}{c'} \|x\|'$, de donde se sigue el resultado. ■

Ya vimos en el apartado 3.5 que en un espacio métrico todo subconjunto compacto era cerrado y acotado (lema 3.5.7) y también vimos que el recíproco no es cierto (ver también el problema 4.18). Esta afirmación obviamente es válida para los espacios normados al ser estos espacios métricos con la métrica inducida por la norma. Sin embargo, si el espacio normado es de dimensión finita, entonces todo cerrado y acotado es necesariamente compacto. Así tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.8 *En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita, todo subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto (ver la definición 3.5.5) si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración: $\Rightarrow$ Si M es compacto, entonces por el lema 3.5.7 es cerrado y acotado.

$\Leftarrow$ Sea M cerrado y acotado. Probemos que es compacto. Sea $n = \dim \mathbb{X}$ y $e_1, \ldots, e_n$ una base. Sea la sucesión $(x_m)_m$ de M, entonces $x_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} e_k \in \mathbb{X}$. Como M es acotado, x_m también lo es, i.e., existe $K > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\|x_m\| \leq K$, luego, por el lema 4.3.1 tenemos que

$$K \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} e_k \right\| \geq c \sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(m)}|.$$

Luego las sucesiones $(\alpha_k^{(m)})_m$ son acotadas para cada k, y por tanto existe una subsucesión convergente (Lema de Bolzano-Weierstrass) a α_k, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ –debemos hacer una construcción similar a la de la prueba del lema 4.3.1–. Así, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge a $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Como M es cerrado $x \in M$. Luego toda sucesión $(x_n)_n$ de m tiene una subsucesión convergente en M, i.e., M es compacto. ■

4.4. Aplicaciones lineales

Gracias a la estructura algebraica de los espacios normados podemos definir un caso particular de gran importancias de los operadores discutidas en el apartado **3.2**: las aplicaciones lineales. Como allí $\mathcal{D}(T)$ denotará el dominio de la aplicación T e $\mathcal{I}(T)$ la imagen de T. Asumiremos que los espacios $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son *espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$) y que tenemos el operador $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$.

Definición 4.4.1 *Una aplicación (operador)* $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Veamos algunos ejemplos de operadores lineales:

Ejemplo 4.4.2 *El operador identidad* $I : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y = Ix = x$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$.

Ejemplo 4.4.3 *El operador nulo* $\Theta : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = \Theta x = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$.

Ejemplo 4.4.4 *Sea* $\mathbb{P}$ *el espacio de los polinomios reales* $p(t)$ *(o complejos) de cualquier grado. Definamos el operador* $D : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}$, $y(t) = Dp(t) = p'(t)$ *que denominaremos operador derivación (o derivada).*

Ejemplo 4.4.5 *El operador* $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $y = Tx = A \cdot x$, *donde* A *es una matriz* $n \times m$, x *e* y *son los correspondientes vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *respectivamente, y "·" denota la multiplicación usual de matrices.*

Ejemplo 4.4.6 *Sea* $C([a, b])$ *el espacio de las funciones continuas* $f(t)$. *Definamos el operador* $M : C([a, b]) \mapsto C([a, b])$, $y(t) = Mf(t) = tf(t)$ *que denominaremos operador multiplicación por* t.

Definición 4.4.7 *Llamaremos espacio nulo o núcleo de T al espacio $\mathcal{N}(T)$ de todos los vectores $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = 0$.*

Teorema 4.4.8 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Entonces*

1. *$\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.*
2. *Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) \leq n$.*
3. *$\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$.*

Demostración: 1. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T)$. Entonces existen $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tales que $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$. Como T es lineal, entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\mathcal{I}(T) \ni T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

y obviamente $T0 = 0$. Luego por el teorema 4.1.4 $\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.

2. Sean $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathcal{I}(T)$, $n+1$ vectores. Existen $n+1$ vectores de $\mathcal{D}(T)$ $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tales que $Tx_k = y_k$, $k = 1, \ldots, n+1$. Como $\dim \mathcal{D}(T) = n$, existen $n+1$ números no todos nulos tales que $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = 0$ (¿por qué?). Pero T es lineal luego

$$T\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k y_k = 0,$$

i.e., los vectores $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathcal{I}(T)$ son linealmente dependientes, por tanto $\dim \mathcal{I}(T) \leq n$.

3. Este apartado es similar al primero y se deja como ejercicio. ■

Una pregunta natural e importante que surge al estudiar los operadores lineales es saber cuándo existe el operador inverso. El siguiente resultado responde a dicha cuestión:

Teorema 4.4.9 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal con $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ y $\mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$. Entonces*

1. *Existe la aplicación inversa T^{-1} de T, si y sólo si $Tx = 0$ implica $x = 0$.*
2. *Si existe T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.*

3. *Si T es invertible y* $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$*, entonces* $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{D}(T) = n$.

Demostración: Ante todo recordemos que para que una aplicación tenga inversa ha de ser inyectiva, i.e., $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$, o, equivalentemente, $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

2. Comenzaremos probando 2. Supongamos que existe T^{-1}. Probemos que para todos $y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$. Como existe T^{-1}, entonces, para todos $y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T)$ existen $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tales que $x_1 = T^{-1}y_1$ y $x_2 T^{-1} y_2$, luego $y_1 = Tx_1$ y $y_2 = Tx_2$. Como T es lineal

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Si le aplicamos el operador T^{-1} a la ecuación anterior nos queda

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2.$$

Probemos ahora 1. Supongamos que $Tx = 0$ implica $x = 0$. Entonces, cuales quiera sean x_1 y x_2 tales que $Tx_1 = Tx_2$, tenemos

$$0 = Tx_1 - Tx_2 = T(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

i.e., T es inyectiva, luego existe su inversa T^{-1}. Por el contrario, si T tiene inversa entonces T^{-1} es lineal (por el apartado 2.) así que tomando T^{-1} en la ecuación $Tx = 0$ obtenemos $x = T^{-1}0 = 0$.

3. Por el teorema 4.4.8 $\dim \mathcal{I}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T)$. Si aplicamos el mismo teorema a la aplicación lineal T^{-1} obtenemos $\dim \mathcal{I}(T^{-1}) = \dim \mathcal{D}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T^{-1}) = \dim \mathcal{I}(T)$, i.e., $\dim \mathcal{I}(T) \geq \dim \mathcal{D}(T)$, de donde se sigue el resultado. ■

Ejemplo 4.4.10 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = n < \infty$*. Prueba que* $\dim \mathbb{X} = n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$.

Sea $e_1, \ldots, e_k$, $k \leq n$ una base del núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T. Completemos dichos vectores con los vectores linealmente independientes $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de $\mathbb{X}$ tales que $e_1, e_2, \ldots e_n$ sean una base de $\mathbb{X}$. Probemos que $Te_{k+1}, \ldots Te_n$ es una base de la imagen $\mathcal{I}(T)$ de T. Ante todo notemos que $\operatorname{span}(Te_{k+1}, \ldots, Te_n) = \mathcal{I}(T)$. En efecto, para todo $y \in \mathcal{I}(T)$ existe un $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ tal que $y = Tx$,

$$y = Tx = T(x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + x_n e_n) = 0 + x_{k+1} T e_{k+1} + \ldots x_n T e_n.$$

Probemos ahora que son linealmente independientes. Supongamos que no lo son, entonces existe al menos un $x_j \neq 0$, $j = k+1, \ldots, n$, tal que

$$x_{k+1}Te_{k+1} + \cdots + x_nTe_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x_{k+1}e_{k+1} + \cdots + x_ne_n) = 0.$$

Pero entonces $z = x_{k+1}e_{k+1} + \cdots + x_ne_n \in \mathcal{N}(T)$, lo cual indica que $z = 0$ (pues z es combinación lineal de vectores que no pertenecen al núcleo). Pero entonces los vectores $e_{k+1}, \ldots, e_n$ son linealmente dependientes lo cual es una contradicción, i.e., los vectores $Te_{k+1}, \ldots Te_n$ son linealmente independientes y por tanto son una base de $\mathcal{I}(T)$. Entonces $\dim \mathcal{N}(T) = k$ y $\dim \mathcal{I}(T) = n - k$, de donde se deduce el resultado. ■

Ejercicio 4.4.11 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. Prueba que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ si y sólo si T^{-1} existe.* ***Ayuda:*** *Usa el resultado del ejemplo anterior.*

Este resultado no es cierto para dimensión infinita. En efecto, sea $\mathbb{X}$ el conjunto de las funciones infinitamente derivables en $\mathbb{R}$. Sea $D : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y(t) = Dx(t) = x'(t)$ (derivada). Para cada $y(t) \in \mathbb{X}$ podemos definir $x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$, de forma que $x'(t) = y(t)$ en $\mathbb{R}$, i.e., $\mathcal{I}(D) = \mathbb{X}$. Pero $Dx = 0$ no implica $x = 0$, ya que $x'(t) = 0$ para toda función constante, no necesariamente nula, es decir no existe el inverso de de D (ver el punto 1 del teorema 4.4.9).

Definición 4.4.12 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y sea el operador $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ lineal. T es acotado si existe $c \geq 0$ tal que*[3]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{4.4.1}$$

De lo anterior se sigue que si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0. \tag{4.4.2}$$

El menor valor de c para el cual (4.4.1) se cumple lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina *norma del operador* lineal T. Tomando supremos en $x \neq 0$ en (4.4.2) e ínfimos en c tenemos

$$\sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

[3]Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Por otro lado, para todo $y \neq 0$

$$\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} := c',$$

luego $\|Ty\| \leq c'\|y\|$ por lo tanto

$$\|T\| = \inf\{c : \|Ty\| \leq c\|y\|, \quad \forall y \in \mathbb{X}\} \leq c' = \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

de donde se sigue que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{4.4.3}$$

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Además de (4.4.1), tomando ínfimos en c se tiene

$$\forall y \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|Ty\| \leq \|T\|\|y\|.$$

Ejercicio 4.4.13 *Prueba que efectivamente la cantidad $\|T\|$ definida en (4.4.3) es una norma, es decir se cumplen los axiomas de la definición 4.2.1.*

Usando (4.4.3) se sigue que $\|T\| \geq 0$ y solo vale cero si $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, i.e., $Tx = 0$ para todo $x \neq 0$, luego $T = 0$. Además, como $(\lambda T)x = \lambda(Tx)$ se sigue que $\sup_{\|x\|=1} \|(\lambda T)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|$. Finalmente, como $\|(T+U)x\| \leq \|Tx\| + \|Ux\|$ se tiene, tomando supremos en $\|x\| = 1$ que $\|T+U\| \leq \|T\| + \|U\|$. ■

Ejemplo 4.4.14 *El operador I del ejemplo 4.4.2 es acotado y $\|I\| = 1$. El operador Θ del ejemplo 4.4.3 es acotado y $\|\Theta\| = 0$. El operador D del ejemplo 4.4.4 es no acotado. En efecto, escojamos el espacio $\mathbb{P}$ en $J = [0,1]$ e introduzcamos la norma $\|p\| = \max_{t \in J} |p(t)|$. Como $Dp(t) = p'(t)$, entonces si escogemos la sucesión $p_n(t) = t^n$, $\|p_n\| = 1$, tenemos $\|Dp_n\| = n$, luego $\|Dp_n\|/\|p_n\| = n$, que obviamente no es acotada. Finalmente, para el ejemplo 4.4.5 de las matrices, si usamos por ejemplo la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$, entonces*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad c = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj}^2} := \|T\|,$$

donde a_{kj} son los elementos de la matriz A.

Ejercicio 4.4.15 *Sea el espacio $C^\infty([a,b])$ de las funciones continuas con la norma del máximo del Ejemplo 4.2.6. Sea $x(t) \in C^\infty([a,b])$ y sean los los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pertenecientes $[a,b]$. Definamos el funcional*

$$f : C^\infty([a,b]) \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Prueba que f es lineal y acotado y que $\|f\| = l_n := \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

La linealidad se sigue fácilmente de la definición de f. Como $\mathbb{R}$ es un espacio normado con la norma del valor absoluto, entonces

$$|f| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k||x(t_k)| \leq \operatorname*{máx}_{t\in[a,b]} |x(t)| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = l_n \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq l_n.$$

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en los subintervalos $[a,t_1], \ldots, [t_n,b]$. Construyamos ahora una función $\tilde{x}(t)$ de forma que $\tilde{x}(t_k) = \operatorname{signo}(c_k)$, y sea lineal entre los puntos $(0,0)$, $(t_1, \operatorname{signo}(c_1)), \ldots, (t_n, \operatorname{signo}(c_n))$ y $(b,0)$ (ver figura 4.1). Obviamente $\|\tilde{x}(t)\| = 1$. Además

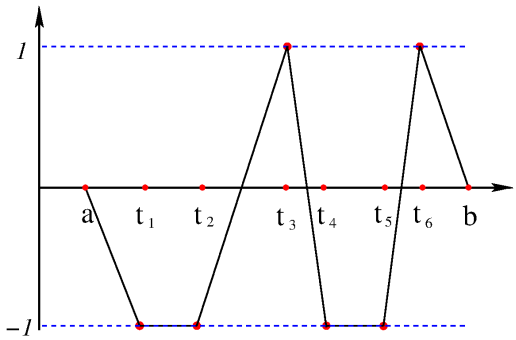


Figura 4.1: La función $\tilde{x}(t)$ con $n = 6$.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq |f(\tilde{x})| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{x}(t_k) \right| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \;\Rightarrow\; \|f\| \geq l_n,$$

de donde se deduce $\|f\| = l_n$. ■

Teorema 4.4.16 *Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.*

Demostración: Sea $\dim \mathbb{X} = n$ y sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de $\mathbb{X}$. Para todo $x \in \mathbb{X}$, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Entonces

$$\|Tx\| = \left\| T \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|Te_k\| \leq \operatorname*{máx}_k \|Te_k\| \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Por otro lado, usando el lema 4.3.1 tenemos que existe un $c > 0$ tal que

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \geq c \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Combinando ambas tenemos

$$\|Tx\| \leq \operatorname*{máx}_k \|Te_k\| \frac{\|x\|}{c} \quad \Rightarrow \quad \|Tx\| \leq \gamma \|x\|,$$

con $\gamma = \operatorname{máx}_k \|Te_k\|/c$. ■

Para terminar este apartado probemos el siguiente teorema sobre aplicaciones lineales continuas.

Teorema 4.4.17 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal de un espacio normado $\mathbb{X}$ a otro espacio normado $\mathbb{Y}$. Entonces*

1. *T es continuo si y sólo si T es acotado.*
2. *Si T es continuo en algún $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T es continuo en $\mathcal{D}(T)$.*

Demostración: Asumiremos que T no es el operador nulo.

1. $\Rightarrow$ Sea T acotado y sea $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ cualquiera. Como T es lineal y acotado, entonces

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\|.$$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \epsilon/\|T\| > 0$ tal que, para todo x con $\|x - x_0\| < \delta$, $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$, i.e., T es continuo en $\mathcal{D}(T)$.

$\Leftarrow$ Sea T lineal y continuo en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ cualquiera. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x con $\|x - x_0\| < \delta$, $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$. Sea $y \neq 0$ en $\mathcal{D}(T)$ cualquiera. Escojamos x tal que

$$x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|} y \Rightarrow x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|} y \Rightarrow \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon.$$

Además, para dichos x tenemos, usando la linealidad de T, que

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\frac{\delta}{2\|y\|}y \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|Ty\| \leq \epsilon \;\Rightarrow\; \|Ty\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta}\|y\|,$$

luego T es acotado.

2. Nótese que en la prueba anterior se probó que si T era continuo en un punto $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, entonces era acotado en $\mathcal{D}(T)$. Pero entonces por 1, al ser acotado en $\mathcal{D}(T)$, es continuo en $\mathcal{D}(T)$. ■

Nota 4.4.18 *El teorema anterior nos indica que la acotación y continuidad para las aplicaciones lineales son equivalentes.*

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ el espacio de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$. Definamos en dicho espacio la suma de dos aplicaciones $A + B$ y la multiplicación por un escalar λ de la forma habitual:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad (A + B)x = Ax + By, \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

Con esta definición es fácil ver que $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio lineal (el elemento nulo de $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es el operador nulo).

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ el subespacio de todas las aplicaciones lineales acotadas (y por tanto, según el teorema 4.4.17, continuas). Entonces, como consecuencia del ejercicio 4.4.13 se sigue que $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio normado.

Ejercicio 4.4.19 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado y $\mathbb{Y}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio de Banach. (ver Teorema 6.3.6).*

Sea $(U_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ una sucesión de Cauchy. Entonces

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall n, m > N, \quad \|U_n - U_m\| < \epsilon,$$

y, por tanto, para cada $x \in \mathbb{X}$

$$\|(U_n - U_m)x\| = \|U_n x - U_m x\| < \epsilon\|x\|, \tag{4.4.4}$$

i.e., la sucesión $(\|U_n x\|)_n \in \mathbb{Y}$ es de Cauchy, y como $\mathbb{Y}$ es completo entonces $\lim_n U_n x = y$. Definamos el operador U tal que, para cada $x \in \mathbb{X}$, $Ux = \lim_n U_n x$. Tomando límite $n \to \infty$ en

$$U_n(\alpha x + \beta y) = \alpha U_n x + \beta U_n y \quad \Rightarrow \quad U(\alpha x + \beta y) = \alpha U x + \beta U y,$$

luego U es lineal. Tomando el límite $m \to \infty$ en (4.4.4) tenemos

$$\|U_n x - Ux\| \leq \epsilon \|x\| \quad \Rightarrow \quad U - U_n \text{ es acotado.}$$

Como $U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $U - U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, su suma $U_n + U - U_n = U$ es acotada. Además, de la desigualdad anterior se sigue que, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|(U_n - U)x\|}{\|x\|} \leq \epsilon \Rightarrow \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(U_n - U)x\|}{\|x\|} \leq \epsilon \Rightarrow \|U_n - U\| \to 0.$$

Luego $U \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, de donde se sigue que el espacio de las aplicaciones lineales acotadas $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ cuando $\mathbb{Y}$ es de Banach, es completo, y por tanto de Banach. ■

4.5. El teorema de Banach-Steinhaus

Para terminar este capítulo dedicado a los espacios normados vamos a demostrar un resultado muy útil para una sucesión de operadores lineales y acotados: el teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 4.5.1 (Banach-Steinhaus) *Sea $(T_n)_n$ una sucesión*[4] *de operadores lineales acotados $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ a otro normado cualquiera $\mathbb{Y}$ tales que la sucesión $(\|T_n x\|)_n$ es acotada para cada $x \in \mathbb{X}$, o sea, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe un $c_x \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se tiene*

$$\|T_n x\| \leq c_x. \tag{4.5.1}$$

Entonces la sucesión de normas $(\|T_n\|)_n$ es acotada, es decir, existe un $c \geq 0$ tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se cumple

$$\|T_n\| \leq c. \tag{4.5.2}$$

Nota 4.5.2 *Este teorema se puede generalizar a una familia de operadores T_i, $i \in I$, no teniendo que ser el conjunto de índices I numerable. Se deja como ejercicio al lector que modifique la prueba para este caso.*

[4] Se asume nuevamente que todos los T_n tienen el mismo dominio $\mathcal{D}(T_n)$.

Demostración: Comenzaremos construyendo una familias de subconjuntos $M_k \subset \mathbb{X}$, $k = 1, 2, \ldots$, de todos los $x \in \mathbb{X}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n x\| \leq k.$$

Probemos que los M_k son cerrados. Para ello probemos que si $x \in \overline{M_k}$, entonces $x \in M_k$. Como $x \in \overline{M_k}$ existe una sucesión $(x_m)_m \in M_k$ tal que $x_m \to x$, pero entonces, para todo m y todo n, como $x_m \in M_k$

$$\|T_n x_m\| \leq k \quad \Rightarrow \quad m \to \infty \quad \|T_n x\| \leq k \quad \Rightarrow \quad x \in M_k.$$

Por la condición (4.5.1) está claro que para cada $x \in \mathbb{X}$ existe un entero $k_x = [c_k] + 1$, tal que

$$\|T_n x\| \leq c_x \leq [c_x] + 1 = k_x,$$

luego cada $x \in \mathbb{X}$ pertenece a algún M_k, o sea,

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Pero entonces el Corolario del Teorema de Baire 3.6.2 nos asegura que al menos uno de los conjuntos M_k contiene un abierto. Supongamos que M_{k_0} es dicho conjunto, i.e., entonces existe una bola $B(x_0, r) \subset M_{k_0}$ tal que para todo $z \in B(x_0, r)$ se tiene $\|T_n z\| \leq k_0$. Elijamos ahora z

$$z = x_0 + \gamma x, \quad \gamma > 0,$$

de forma que $z \in B(x_0, r)$ para todo $x \in \mathbb{X}$, $x \neq 0$. Para ello basta que $\gamma \|x\| < r$, para todo x. Tomemos por ejemplo $\gamma = r/(2\|x\|)$. Entonces, para todo $n = 1, 2, \ldots$, $\|T_n z\| \leq k_0$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{X}$, y todo $n = 1, 2, \ldots$, tenemos

$$\|T_n x\| = \left\| T_n \left(\frac{z - x_0}{\gamma} \right) \right\| = \frac{1}{\gamma} \|T_n z - T_n x_0\| \leq \frac{1}{\gamma} (\|T_n z\| + \|T_n x_0\| \leq \frac{2k_0}{\gamma}.$$

Usando que $\gamma = r/(2\|x\|)$ tenemos

$$\frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \frac{4k_0}{r} \quad \Rightarrow \quad \sup_{\|x\|=1} \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \frac{4k_0}{r} = c,$$

de donde se sigue que, para todo $n = 1, 2, \ldots$, $\|T_n\| < c$, como se quería probar. ■

Nótese que la hipótesis (4.5.1) y la consecuencia (4.5.2) del Teorema de Banach-Steinhaus se pueden cambiar por

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty, \ \forall x \in \mathbb{X}, \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty,$$

respectivamente, lo que explica que a este teorema se le suela denominar *Principio de acotación uniforme*, pues se obtiene una cota uniforme para la sucesión de normas $\|T_n\|$ a partir de las cotas puntuales $\|T_n x\|$.

Ejercicio 4.5.3 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ con $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Prueba que si T_n es puntualmente convergente a un operador T (véase la Definición 3.5.32) entonces la sucesión $(T_n)_n$ está uniformemente acotada, i.e.,*

$$\exists c > 0 \textit{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\| < c,$$

y el operador T es lineal y acotado (continuo).

Efectivamente, al ser $\|T_n x\|$ convergente para cada x, es acotada, luego se tiene (4.5.1), por tanto podemos aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus 4.5.1.

La linealidad sale de tomar límites $n \to \infty$ en

$$T(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha T_n x + \beta T_n y.$$

Por otro lado, como para todo n, $\|T_n\| < c$, se sigue que existe un $c > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n x\| \leq c\|x\|.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, y usando la continuidad de la norma, tenemos entonces que existe $c > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad \|Tx\| \leq c\|x\|,$$

luego T es acotado (continuo). ■

4.5.1. Aplicación a las series de Fourier

Una aplicación interesante del Teorema de Banach-Steinhaus tiene que que ver con las series de Fourier.

Dada una función $f(x)$ periódica de periodo 2π definiremos la serie trigonométrica de Fourier por

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \tag{4.5.3}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \tag{4.5.4}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, asumiendo que las integrales existen. Una pregunta natural es cuándo, para cada[5] $x \in [0, 2\pi)$, las sumas parciales de la serie de Fourier

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{4.5.5}$$

convergen, y, en ese caso, si $S_n f(x) \to f(x)$ en cada x, es decir si hay convergencia puntual. Nosotros nos ocuparemos de la primera cuestión. Para la segunda el lector puede consultar, por ejemplo, [13, §18.2].

Por ejemplo, encontremos la serie de de Fourier la función $f(x) = 1$ si $0 \le x < \pi$ y 0 si $\pi \le x < 2\pi$. Un cálculo directo nos da $a_0 = 1$,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right).$$

Luego la serie de Fourier de f es

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}. \tag{4.5.6}$$

Usando el criterio de Abel-Dirichlet para series numéricas[6] se puede comprobar que la serie anterior converge en todo punto de $[0, 2\pi)$ (de hecho en todo $\mathbb{R}$), incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$ donde toma el

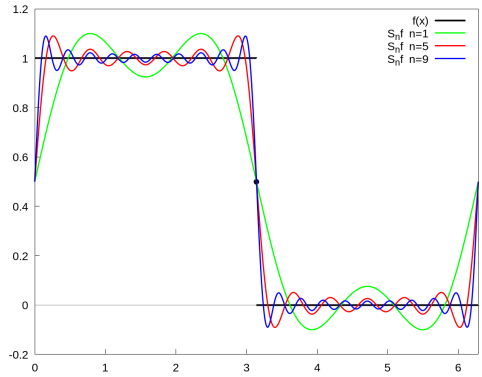


Figura 4.2: La función discontinua f y las sumas parciales de su serie de Fourier para $n = 1, 5, 9$.

valor $1/2$ (ver figura 4.2) Es decir, para la convergencia de la serie de Fourier, aunque esta no converja a la función en todo punto, no es necesaria la continuidad de f. Resulta que tampoco es suficiente. Es decir, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.5.4 *Existen funciones 2π-periódicas continuas cuyas series de Fourier divergen en un punto x_0 dado.*

Para probar el teorema anterior conviene recordar algunas de las propiedades de las series de Fourier.

Sustituyendo las expresiones (4.5.4) de los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier en (4.5.5) obtenemos

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t-x)dt, \quad D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz), \tag{4.5.7}$$

donde $D_n(z)$ es el núcleo de Dirichlet. Usando la identidad

$$2\cos(kz)\sin z/2 = \sin(k+1/2)z - \sin(z-1/2)t,$$

y sumando de $k = 1$ hasta n obtenemos la siguiente expresión alternativa para el núcleo de Dirichlet:

$$D_n(z) = \frac{\sin(n+1/2)z}{2\sin t/z}, \quad z \neq 0, \quad D_n(0) = n + \frac{1}{2}. \tag{4.5.8}$$

[5]Por la periodicidad de f, y $S_n f(x)$, eso equivale a preguntarnos por la convergencia en todo $\mathbb{R}$.

[6]Ver, por ejemplo, [13, Proposición 3 §16.2.3, pág. 376].

Nótese que $|D_n(z)| \leq n + 1/2$.

Definamos el espacio $\widetilde{C}$ de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ tales que $f(0) = f(2\pi)$ dotado con la norma del supremo: $\|f\| = \operatorname*{máx}_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. Dicho espacio es un subespacio cerrado en el espacio $C_\infty([0, 2\pi])$ (¿por qué?), luego es completo.

Sin pérdida de generalidad podemos elegir como punto de divergencia al punto $x = 0$.

Definamos la sucesión $(T_n)_n$ de funcionales lineales[7] sobre $\widetilde{C}$

$$T_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt.$$

Nótese que $T_n f = S_n f(0)$. Además

$$|T_n f| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||D_n(t)| dt \leq \operatorname*{máx}_{x\in[0,2\pi]} |f(t)| \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \right)}_{=l_n}.$$

Luego, $\|T_n f\| \leq l_n \|f\|$, luego T_n es acotado para cada n y tomando el supremo para todas las f con $\|f\| = 1$, obtenemos $\|T_n\| \leq l_n$.

Demostremos ahora que $\|T_n\| = l_n$. Para ello vamos a encontrar una sucesión $(f_k)_k$ de funciones continuas en $[0, 2\pi]$ con norma 1 tal que para todo n, $T_n f_k \to l_n$ cuando $k \to \infty$, de donde, por la continuidad de la norma (en este caso el valor absoluto) se deduce que $\|T_n\| = l_n$.

Para ello notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = 0$ en los puntos $a_i = \frac{2i\pi}{2n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, es no negativa en $[0, a_1], \ldots [a_{2n}, a_{2n+1}]$, cuya unión llamaremos Σ_+ y no positiva en $[a_1, a_2], \ldots [a_{2n-}, a_{2n}]$, cuya unión llamaremos Σ_-. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función g_n igual a 1 en Σ_+ y -1 en Σ_- (ver la gráfica de la izquierda en la figura 4.3). Nótese que $g_n(t)D_n(t) = |D_n(t)|$ y que el número de intervalos donde g_n es negativo es exactamente igual a n.

Vamos a construir para cada $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones continuas en $(f_k)_k$ en $[0, 2\pi]$ que valga 1 en $[0, a_1]$ y $[a_{2n+1}, 2\pi]$ y es lineal entre $a_i - \delta_k$ y $a_i + \delta_k$ (ver detalle en la gráfica de la derecha de la figura 4.3

[7] Un funcional lineal T no es más que una aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, de un espacio normado $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) donde $\mathbb{R}$ se entiende como un espacio normado con la norma del valor absoluto.

para cada uno de los intervalos donde g_n es negativo) donde δ_k es lo suficientemente pequeño y lo escogeremos convenientemente como veremos más adelante. Es obvio que $|f_k(x)| \leq |g_n(x)| \leq 1$, luego $\|f_k\| = 1$. Ade-

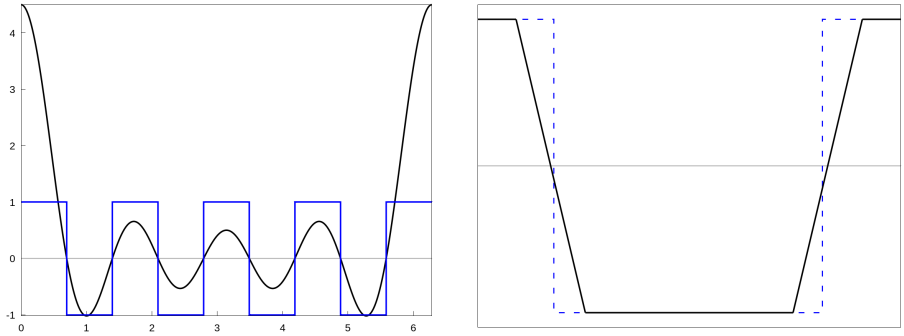


Figura 4.3: Las funciones $D_4(x)$ y $g_4(x)$ (izquierda) y detalle de f_k (derecha).

más, se puede comprobar[8] que para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones f_k y g_n así construidas son tales que

$$\int_0^{2\pi} |f_k(t) - g(t)|dt = 2n\delta_k.$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $l_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(t)D_n(t)dt$, tenemos

$$\begin{aligned} |T_n f_k - l_n| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f_k(t) - g(t)||D_n(t)|dt \\ &\leq \left(\operatorname*{máx}_{x\in[0,2\pi]} |D_n(x)|\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f_k(t) - g(t)|dt \leq \frac{(2n+1)n}{\pi}\delta_k, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\operatorname{máx}|D_n(x)| = n + 1/2$ para todo $x \in [0, 2\pi]$. Luego si, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos en la definición de nuestra función f_k, $\delta_k \leq \frac{\pi}{n(2n+1)k}$ tenemos

$$|T_n f_k - l_n| \leq \frac{1}{k} \to 0 \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad T_n f_k \to l_n,$$

y como $\|f_k\| = 1$, entonces $\|T_n\| = l_n$.

[8]Dicha integral es el área de la diferencia de ambas funciones, por tanto en cada intervalo donde g_n es negativo es igual a $2\delta_k$.

Probemos ahora que la sucesión $(l_n)_n$ es no acotada.

$$l_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{|\sin\frac{t}{2}|}dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt.$$

Hagamos el cambio $z = (n+1/2)t$

$$\begin{aligned} l_n &\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin z|}{z}dz = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{2n}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{|\sin z|}{z}dz \\ &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{2n}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{|\sin z|}{(m+1)\pi}dz = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2n}\frac{1}{m+1}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}|\sin z|dz \\ &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2n}\frac{1}{m+1} \to \infty \text{ si } n\to\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de normas $\|T_n\|$ no está acotada, es decir (4.5.2) no se cumple, por tanto, el Teorema de Banach-Steinhaus nos asegura que tiene que existir una función $f \in \tilde{C}$ (recordemos que $\tilde{C}$ (es completo) tal que $\|T_n f\| \to \infty$ ($T_n f$ es no acotada para alguna f, o si no se cumpliría (4.5.1)), pero como $T_n f = S_n f(0)$, eso significa que tiene que existir una función f tal que su serie de Fourier en cero es divergente. ■

4.6. Problemas

Problema 4.1 Prueba que los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{P}_n$ y $C([a,b])$ son espacios vectoriales.

Solución: Simplemente hay que comprobar que en cada caso se cumplen las propiedades de la definición 4.1.1.

Problema 4.2 Prueba que para todos x, y de un espacio normado $\mathbb{X}$ se cumple la desigualdad $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. Deduce de este resultado que la norma $\|\cdot\| : \mathbb{X} \mapsto [0,\infty)$ es una aplicación continua.

Solución: Tenemos que

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|, \quad \|y\| \leq \|x-y\| + \|x\| \quad \Rightarrow$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|, \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \quad \Rightarrow \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Esta claro que si $\|x_n - x\| \to 0$, entonces $\|x_n\| \to \|x\|$, de donde se sigue el resultado. ■

Problema 4.3 Prueba que el espacio ℓ^∞ de las sucesiones acotadas $(x_n)_n$ con la *norma* $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ es un espacio normado. Demuestra que en este espacio el subespacio Y de las sucesiones con un número finito de términos no nulos no es cerrado (y por tanto no es completo) en ℓ^∞. **Ayuda:** Usa la sucesión $s_n = (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots) \in Y$ y la sucesión $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, 1/(n+1), \dots) \in \overline{Y}$.

Solución: Probar que dicho espacio es normado es similar a la prueba de que ℓ^∞ es métrico (ver ejemplo 3.1.11). Probemos que $Y \subset \ell^\infty$ no es cerrado. Sea la sucesión $s_n = (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots) \in Y$. Está claro que para cada n, s_n coincide con la sucesión $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, 1/(n+1), \dots)$ hasta el término n. Además

$$\|s_n - x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_n^{(k)} - x^{(k)}| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad n \to \infty.$$

Pero $x \notin Y$, luego Y no es cerrado pues no contiene a todos sus puntos límites. ■

Problema 4.4 Prueba que los operadores de los ejemplos 4.4.2-4.4.6 son operadores lineales. Decide, usando distintas normas, si el operador del ejemplo 4.4.6 es acotado.

Solución: Los ejemplos 4.4.2-4.4.5 son inmediatos. Veamos el operador del ejemplo 4.4.6. En este caso tenemos

$$S(\alpha f(t) + \beta g(t)) = t(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha t f(t) + \beta t g(t) = \alpha S f(t) + \beta S g(t),$$

luego es lineal. Veamos si el operador multiplicación por t es acotado o no dependiendo de la norma.

$$\|Mf(t)\| = \|tf(t)\| = |t|\|f(t)\| \leq \max\{|a|, |b|\} \cdot \|f(t)\| = c\|f(t)\|.$$

Luego hemos probado que M es acotado en $C([a, b])$ cualquiera sea la norma que usemos. ■

Problema 4.5 Prueba que el operador $T : C^\infty_{[0,1]} \mapsto C^\infty_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau, \tag{4.6.1}$$

con $k(t, \tau)$ continua en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ es lineal y acotado y que

$$\|T\| = K = \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t, \tau)|d\tau.$$

Solución: De la desigualdad

$$|y(t)| \leq \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \leq \|x\| \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau,$$

se sigue, tomando el supremo en $t \in [0,1]$, que $\|Tx\| \leq K\|x\|$, con

$$K = \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Luego $\|T\| \leq K$. Definamos ahora la función

$$u_n(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n. \end{cases}$$

Sea la sucesión $x_n(t,\tau) = u_n(k(t,\tau))$. Nótese que $\|x_n\| = 1$, y que

$$k(t,\tau)u_n(k(t,\tau)) \geq 0, \text{ e igual a } |k(t,\tau)| \text{ cuando } |k(t,\tau)| \geq 1/n.$$

Denotemos por I_n el conjunto de puntos (subintervalos de $[0,1]$) donde se cumple la desigualdad anterior. Se tiene entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| = \int_0^1 k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau = \left[\int_{I_n} + \int_{[0,1]\setminus I_n}\right] \geq \int_{I_n} k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau.$$

Pero como

$$\int_{I_n} k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau = \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau = \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau,$$

y en $[0,1] \setminus I_n$, $|k(t,\tau)| < 1/n$, entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

Tomando supremos en n obtenemos[9]

$$\sup_n |Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

[9]Ello se debe a la siguiente propiedad del supremo: Si $\forall x \in M \subset \mathbb{R}$ y para todo lo $\epsilon > 0$, $x \geq a - \epsilon$, entonces $\sup_{x\in M} x \geq a$. En efecto, si no fuese cierto entonces, si $\sup_{x\in M} x < a$, entonces $\forall x \in M$, $x < a$ y por tanto existirá un $\epsilon > 0$ tal que $x + \epsilon < a$ (¿por qué?), lo cual es una contradicción.

Tomando en la desigualdad anterior máximo en t tenemos

$$\max_{t\in[0,1]}\left[\sup_n |Tx_n(t,\tau)|\right] \geq \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau = K.$$

Pero, como $\|x_n(t,\tau)\| = 1$, entonces[10]

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \geq \max_{t\in[0,1]}\left[\sup_n |Tx_n(t,\tau)|\right] \geq \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau = K,$$

de donde se sigue que $\|T\| = K$.

Nótese que como corolario de lo anterior se tiene que el funcional $f : C^\infty_{[0,1]} \mapsto \mathbb{R}$ con $f(x) = \int_0^1 k(\tau)x(\tau)d\tau$, con $k(\tau)$ continua en $[0,1]$ es acotado y $\|f\| = \int_0^1 |k(\tau)|d\tau$. ■

Problema 4.6 Prueba que el operador $T : L^1[0,1] \mapsto L^1_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| = \max_{\tau\in[0,1]}\int_0^1 |k(t,\tau)|dt,$$

donde por $L^1[0,1]$ denotamos el completamiento del conjunto de las funciones integrables en $[0,1]$, i.e., $x \in L^1[0,1]$ si $\int_0^1 |x(t)|dt < +\infty$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| dt \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt\right)|x(\tau)|d\tau \leq \max_{\tau\in[0,1]}\left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt\right)\|x\| = K\|x\| \;\Rightarrow\end{aligned}$$

$\|T\| \leq K$. Sea $\tau_0 \in [0,1]$ el valor donde se alcanza el máximo[11] anterior, $K = \int_0^1 |k(t,\tau_0)|dt$. Como $k(t,\tau)$ es continua en un cerrado y acotado, entonces es uniformemente continua en dicho cerrado y acotado. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $|t-t'| < \delta$ y $|\tau-\tau'| < \delta$, $|k(t,\tau)-k(t',\tau')| < \epsilon$. Elijamos ahora un intervalo $I \subset [0,1] = [\tau_1,\tau_2]$, tal que $\tau_1 \leq \tau_0 \leq \tau_2$ con $\tau_2 - \tau_1 < \delta$ y definamos la función

$$\tilde{x}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_2-\tau_1}, & t \in [\tau_1,\tau_2], \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases} \qquad \text{además } \|\tilde{x}\| = 1.$$

[10] Los x_n son un subconjunto de las x con norma 1.

[11] La función $g(\tau) = \int_0^1 |k(t,\tau)|dt$ es continua en $[0,1]$ (ver Teorema de la página 54).

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\tilde{x}\| = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau \right| dt$$
$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| dt$$

Pero

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau_0)d\tau \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau_0) - k(t,\tau)d\tau \right|$$
$$\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| + \int_{t_1}^{t_2} |k(t,\tau_0) - k(t,\tau)|\, d\tau \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| + \epsilon,$$

luego

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| \geq \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau_0)d\tau \right| - \epsilon = (t_2 - t_1)|k(t,\tau_0)| - \epsilon, \tag{4.6.2}$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| dt \geq \int_0^1 |k(t,\tau_0)|dt - \epsilon = K - \epsilon.$$

Es decir, para todo $\epsilon > 0$, $\|T\| \geq K - \epsilon$, luego si tomamos el límite $\epsilon \to 0$, i.e., $\|T\| \geq K$, y por tanto $\|T\| = K$. ■

Problema 4.7 Prueba que el operador $T : L^1_{[0,1]} \mapsto C^\infty_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| = \max_{\tau,t\in[0,1]} |k(t,\tau)|.$$

Solución: De la desigualdad

$$|Tx(t)| \leq \max_{\tau\in[0,1]} |k(t,\tau)| \int_0^1 |x(\tau)|d\tau, \text{ tomando máx en } t \in [0,1] \Rightarrow \|Tx\| \leq K\|x\|,$$

con $K = \max_{\tau,t\in[0,1]} |k(t,\tau)|$. De forma análoga al ejemplo anterior existen $t_0, \tau_0 \in [0,1]$ tales que $|k(t_0,\tau_0)| = K$.

Ahora construimos la misma función auxiliar del problema 4.6 y tenemos,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\tilde{x}\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau \right| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{k(t,\tau)}{t_2 - t_1} d\tau \right|.$$

Usando (4.6.2) se sigue que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\max_{t\in[0,1]} \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{k(t,\tau)}{t_2 - t_1} d\tau \right| \geq \max_{t\in[0,1]} |k(t,\tau_0)| - \epsilon \Rightarrow \|T\| \geq K - \epsilon,$$

i.e., tomando $\epsilon \to 0$, $\|T\| \geq K$ de donde se sigue el resultado. ■

Problema 4.8 Prueba que el operador $T : C^2_{[0,1]} \mapsto C^2_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 dt d\tau}.$$

En este caso no es sencillo encontrar la norma del operador en el caso general.

Solución: Ello se sigue de las siguientes desigualdades:

$$\|Tx\| = \sqrt{\int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right|^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)x(\tau)|d\tau \right)^2 dt} \leq$$

$$\overset{\text{Hölder } p=2}{\leq} \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|^2 d\tau \right) \left(\int_0^1 |x(\tau)|^2 d\tau \right) dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 d\tau dt} \sqrt{\int_0^1 |x(\tau)|^2 d\tau} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 d\tau dt}\, \|x\|.$$

■

Problema 4.9 Demuestra que el operador T del ejemplo 4.4.5 $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $y = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es acotado en los siguientes casos

1. $T : \mathbb{R}^n_\infty \mapsto \mathbb{R}^n_\infty$ (ver ejemplo 3.1.8). Prueba que en este caso

$$\|T\| = \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right).$$

2. $T : \mathbb{R}^n_1 \mapsto \mathbb{R}^n_1$ (ver ejemplo 3.1.7). Prueba que en este caso

$$\|T\| = \operatorname*{máx}_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right).$$

3. $T : \mathbb{R}^n_2 \mapsto \mathbb{R}^n_2$ (ver ejemplo 3.1.7). Prueba que en este caso

$$\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2}.$$

Solución: Tenemos que $y = Tx = Ax$. Comencemos probando 1.

$$\|Tx\| = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \left[\max_{i=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right] \|x\| = K\|x\| \Rightarrow \|T\| \leq K.$$

Sea i_0 el índice donde se alcanza el valor de K, i.e., $K = \sum_{k=1}^{n} |a_{i_0 k}|$, y sea $\tilde{x}$, tal que $\tilde{x}_k = \operatorname{signo}(a_{i_0 k})$. Entonces

$$\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\tilde{x}\| = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{x}_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i_0 k} \tilde{x}_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i_0 k}| = K,$$

de donde se sigue el resultado.

2. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||x_k| = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right] |x_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left[\max_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right] |x_k| = \left[\max_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right] \|x\| = K\|x\| \Rightarrow \|T\| \leq K. \end{aligned}$$

Sea k_0 el índice donde se alcanza el valor de K, i.e., $K = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik_0}|$, y sea $\tilde{x} = \delta_{k,k_0}$, i.e., tal que $\tilde{x}_k$ vale cero para todo $k \neq k_0$ y uno si $k = k_0$. Entonces

$$\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\tilde{x}\| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{x}_k \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik_0}| = K.$$

3. En este caso, usando la desigualdad de Hölder (3.7.2), obtenemos

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||x_k| \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right] \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right],$$

luego $\|Tx\|^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right] \|x\|^2$, de donde se sigue el resultado. En este caso, a diferencia de los anteriores no es sencillo encontrar la norma del operador T. En el caso cuando A es una matriz simétrica, se puede probar que $\|T\| = |\lambda|$, siendo λ el mayor autovalor en valor absoluto de A. ■

Problema 4.10 Decide si el operador del ejemplo de las matrices 4.4.5 es acotado si escogemos la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. En caso de que sea acotado da una estimación de su norma.

Solución: Este problema es similar al apartado 3 del problema 4.9.

Problema 4.11 Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal y acotado. Prueba que si $(x_n)_n \in \mathcal{D}(T)$ y $x_n \to x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $Tx_n \to Tx$. Prueba además que el espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $\mathcal{D}(T)$. **Ayuda:** Usa el teorema 4.4.17 y la proposición 3.5.4.

Solución: La primera parte se deduce del teorema 4.4.17 pues como T es acotado es continuo. Para la segunda, tomemos $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ cualquiera. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n \in \mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \to x$. Pero como $x_n \in \mathcal{N}(T)$, entonces $Tx_n = 0$, de donde se deduce, por la continuidad de T que $Tx = 0$, luego $x \in \mathcal{N}(T)$. Como x era arbitrario $\overline{\mathcal{N}(T)} = \mathcal{N}(T)$, luego $\mathcal{N}(T)$ es cerrado. ■

Problema 4.12 Sean A, B dos operadores lineales y biyectivos $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, y $B : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ espacios vectoriales. Entonces existe el operador T inverso del operador $BA : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$, $T = (BA)^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{X}$ y $T = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Solución: En efecto, como A y B son biyectivos, ambos poseen inversos A^{-1} y B^{-1} y los inversos de operadores lineales son lineales (ver teorema 4.4.9). La composición de operadores lineales también es lineal, por tanto, la aplicación $T = A^{-1}B^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ existe, está bien definida, es biyectiva y lineal. Además, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $BA(A^{-1}B^{-1})(z) = z$, por tanto, $T = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. ■

Problema 4.13 Sean dos operadores A, B de $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio normado, lineales y acotados. Prueba que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. En particular, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Solución: De las condiciones del problema se tiene que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

En particular, para $y = Bx \in \mathbb{X}$,

$$\|Ay\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|.$$

Luego, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\| \quad \Rightarrow \quad \|AB\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\|.$$

■

Problema 4.14 Sea $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ el espacio de todas las aplicaciones lineales y acotadas $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Dadas dos aplicaciones lineales $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, definamos la aplicación $T : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{X})$ por $TX = AXB$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que el operador T es lineal y acotado (respecto a la norma de operadores) y que $\|T\| \leq \|A\|\|B\|$.

Solución: Ante todo, recordemos que $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ es el espacio de las aplicaciones lineales y acotadas $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ con la suma definida por $(X+Y)x = (Xx)+(Yx)$ y el producto por un escalar por $(\lambda X)x = \lambda(Xx)$.

Probemos que T es una aplicación lineal. En primer lugar

$$\begin{aligned}(T(X+Y))x =&(A(X+Y)B)x = (A(X+Y))(Bx) = A((X+Y)(Bx))\\ =&A[(X(Bx)) + (Y(Bx))] \overset{A \text{ lineal}}{=} A[(X(Bx)) + (Y(Bx))]\\ =&AXBx + AYBx = TXx + TYx.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(T(\lambda X))x &= (A\lambda XB)x = ((A\lambda X)(Bx) = A((\lambda X)(Bx))\\ &= A(\lambda(X(Bx))) \overset{A \text{ lineal}}{=} \lambda A(X(Bx))\\ &= \lambda(AXB)x = \lambda Tx.\end{aligned}$$

Para probar que es acotado basta usar el problema anterior 4.13

$$\|TX\| \leq \|A\|\|B\|\|X\| \Rightarrow \frac{\|TX\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|B\| \Rightarrow \sup_{\|X\|\neq 0} \frac{\|TX\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|B\|,$$

luego $\|T\| \leq \|A\|\|B\|$. ■

Problema 4.15 Demuestra que no se puede prescindir de la condición de completitud de $\mathbb{X}$ en el Teorema de Banach-Steinhaus 4.5.1. Para ello considera un subespacio $\mathbb{X} \subset \ell^\infty$ consistente en todos los $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ tales que $x_j = 0$ para todo $j > J \in \mathbb{N}$, es decir cada x tiene a lo más las primeras J coordenadas no nulas (la J puede depender de cada x). Sea el operador (funcional) $T_n x = f_n(x) = nx_n$. Probar que $\mathbb{X}$ no es completo (ver problema 4.3), que $|f_n(x)|$ está acotado para cada n y todo $x \in \mathbb{X}$, y que $(\|T_n\|)_n$ es no acotada.

Solución: Usando la sucesión del problema 4.3 podemos comprobar que $\mathbb{X}$ no es cerrado, luego lo es completo. Ahora bien, por la definición de $\mathbb{X}$ está claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n x\| = \sup_{x\in\mathbb{X}} |nx_n|$ es acotado pues, para cada n solo

hay un número finito de coordenadas de x que son no nulas, luego existe un c_x tal que $\|T_n x\| \leq c_x$. Por otro lado, está claro que para cada n podemos elegir un $\tilde{x} \in \mathbb{X}$ tal que $\|\tilde{x}\| = 1$ (por ejemplo, que solo tenga como coordenadas ceros y unos) $nx_n = n$, entonces $\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \geq \|T_n \tilde{x}\| = n$, luego la sucesión $(\|T_n\|)_n$ no es acotada, luego no se tiene (4.5.2). ■

Problema 4.16 Usando el Teorema de Banach-Steinhaus prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach, $\mathbb{Y}$ uno normado, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $\sup_n \|T_n\| = \infty$, entonces existe un $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $\sup_n \|T_n x_0\| = \infty$. Dicho x_0 se suele denominar como punto o vector de *resonancia*.

Solución: Supongamos que es falso, entonces, para todo $x \in \mathbb{X}$, $\sup_n \|T_n x\| < \infty$, luego la sucesión $\|T_n x\|$ es acotada para cada x. Pero entonces por el Teorema de Banach-Steinhaus existe un $c \geq 0$ tal que, para todo n, $\|T_n\| < c$, lo cual contradice que $\sup_n \|T_n\| = \infty$. ■

Problema 4.17 Sea un espacio normado $\mathbb{X}$ y sea $M \subset \mathbb{X}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ distinto de $\mathbb{X}$. Prueba que existe un vector $y \in \mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in M$, $\|y\| = 1$ y $\|y - x\| > 1/2$.

Solución: El resultado de este problema nos indica que si tenemos un subespacio cerrado M de un espacio normado siempre podemos encontrar elementos del espacio que están *lejos* del subespacio M. Elijamos $y_0 \in \mathbb{X} \setminus M$ y sea $d = \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|$. Probemos que $d > 0$. En efecto, si $d = 0$ entonces existiría una sucesión $(x_n)_n \in M$ tal que $x_n \to y_0$. Pero entonces $y_0 \in M$ lo cual es una contradicción. Elijamos ahora $x_0 \in M$ tal que $\|y_0 - x_0\| < 2d$ (está claro que $\|y_0 - x_0\|$ ha de ser mayor que d) y definamos $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. Es *obvio* que $\|y\| = 1$. Sea $x \in M$, entonces, como $x_0 \in M$, $z_0 = x_0 + x\|y_0 - x_0\| \in M$. Entonces

$$\|y - x\| = \frac{\|y_0 - z_0\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{\inf_{z \in M} \|y_0 - z\|}{\|y_0 - x_0\|} = \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} > \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

de donde se sigue el resultado. ■

Problema 4.18 Sea un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión infinita. Prueba que la esfera unidad S, i.e. el conjunto de los $x \in \mathbb{X}$ tales que $\|x\| \leq 1$ no es un compacto[12]. Una consecuencia de este resultado es que si en un espacio normado $\mathbb{X}$ la esfera unidad es compacta, entonces $\mathbb{X}$ es de dimensión finita. **Ayuda:** Usando el problema anterior construir una sucesión de elementos $(x_n)_n \in S$ tal que, para todos $n \neq m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$.

[12]En dimensión finita como la esfera unidad es cerrada y acotada, entonces es un compacto.

Solución: La idea es encontrar una sucesión de elementos $(x_n)_n \in S$ tal que, para todos $n \neq m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$. Está claro de que de dicha sucesión es imposible construir una subsucesión convergente.

Elegimos $x_1 \in S$ tal que $\|x_1\| = 1$. Sea $M_1 = \operatorname{span}(x_1)$. M_1 es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$, luego el problema 4.17 nos asegura que existe un $x_2 \in \mathbb{X}$ con $\|x_2\| = 1$, i.e., $x_2 \in S$, $x_2 \notin M_1$, tal que $\|x_2 - x\| > 1/2$, para todo $x \in M_1$, y, en particular $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Sea $M_2 = \operatorname{span}(x_1, x_2)$. Como M_2 es cerrado en $\mathbb{X}$, el problema 4.17 nos asegura que existe un $x_3 \in S$, $\|x_3\| = 1$, $x_3 \notin M_2$, tal que $\|x_3 - x\| > 1/2$, para todo $x \in M_2$, y, en particular $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$, y así sucesivamente. Nótese que de la construcción anterior tenemos una sucesión infinita de términos distintos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$, i.e., $x_n \in S$. Es decir, tenemos una sucesión infinita de subconjuntos cerrados M_k, $k \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(x_n)_n \in S$ tal que, para todos $n \neq m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$. Luego la esfera S, i.e., el conjunto de los $x \in \mathbb{X}$ tales que $\|x\| \leq 1$ no es un compacto. El resultado que acabamos de probar fue demostrado por F. Riesz. Nótese que la demostración ha consistido en probar que en la esfera de radio unidad de un espacio de dimensión infinita existen sucesiones que no contienen sucesiones de Cauchy. Los espacios (conjuntos) tales que toda sucesión contiene una sucesión de Cauchy se conocen como conjuntos precompactos, por lo que el resultado probado se puede reescribir diciendo: En dimensión infinita la esfera unidad no es precompacta. ■

Capítulo 5

Espacios de Hilbert

5.1. Espacios euclídeos y espacios de Hilbert

En adelante asumiremos que $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial complejo, y por $\overline{z}$ denotaremos al complejo conjugado del número complejo z.

Definición 5.1.1 *Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es un espacio euclídeo*[1] *si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in \mathbb{E}$ existe un número denominado* producto escalar *y que denotaremos por $\langle x, y\rangle$ tal que*

1. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*
2. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.*
3. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$*
4. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ y si $\langle x, x\rangle = 0$, entonces $x = 0$.*

La propiedad 1 se conoce como *propiedad de simetría* del producto escalar, mientras que la 2. y 3. implican la linealidad del mismo respecto al primer argumento (de la izquierda).

Ejercicio 5.1.2 *Prueba que, de la definición anterior, se tiene que*

1. *Para todos $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.*

[1] También suele ser denominado espacio prehilbertiano.

2. *Para todos* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.

3. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.

4. *Si* $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ *para todos los* $z \in \mathbb{E}$, *entonces* $x = y$.

Para probar 1. combinamos los puntos 1. y 2. de la definición. Para 2. combinamos los puntos 1. y 3. de la definición. Para 3. basta elegir $\lambda = 0$ en el punto 3 de la definición. Finalmente, para probar 4. usamos los puntos 2. y 3. de la definición que nos da $\langle x - y, z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathbb{E}$. Eligiendo ahora $z = x - y$ y usando el punto 4. de la definición obtenemos el resultado. ■

Ejemplo 5.1.3 *El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio* $\mathbb{C}^n$ *con el producto escalar estándar: dados* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Ejemplo 5.1.4 *Otro ejemplo importante es* ℓ^2, *el espacio de las sucesiones* $(x_n)_n$ *tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, *donde dadas dos sucesiones* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, *e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ *el producto escalar viene dado por*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Nótese que de la desigualdad de Hölder 3.7.3 se sigue que dicho producto escalar esta bien definido.

Una prueba directa de dicha afirmación es como sigue: Para todos $a, b \geq 0$ se tiene $ab \leq (a^2 + b^2)/2$. Tomemos $a = |x_i|/\|x\|$, $b = |y_i|/\|y\|$, donde la norma $\|\cdot\|$ es la norma de ℓ^2. Entonces

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|x_i|^2}{\|x\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|y\|^2}\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{\|x\|^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i|^2}{\|y\|^2} = 1,$$

de donde se deduce el resultado pues $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$.

Ejemplo 5.1.5 *Nuestro tercer ejemplo es el espacio* $C([a, b])$ *de las funciones continuas en* $[a, b]$ *cerrado y acotado con el siguiente producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{5.1.1}$$

Una propiedad importante de los espacios euclídeos es la desigualdad de Cauchy-Schwarz[2]

Teorema 5.1.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,*

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle. \tag{5.1.2}$$

Demostración: Para demostrarla basta usar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathbb{E}$, $\langle \lambda f + g, \lambda f + g\rangle \geq 0$, o equivalentemente,

$$|\lambda|^2\langle f, f\rangle + \lambda\langle f, g\rangle + \overline{\lambda}\langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle = |\lambda|^2\langle f, f\rangle + 2\Re(\lambda\langle f, g\rangle) + \langle g, g\rangle \geq 0.$$

Escogiendo $\lambda = \alpha\overline{\langle f, g\rangle}/|\langle f, g\rangle|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos

$$0 \leq |\lambda|^2\langle f, f\rangle + 2\Re(\overline{\lambda}\langle f, g\rangle) + \langle g, g\rangle = |\alpha|^2\langle f, f\rangle + 2|\alpha||\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle,$$

De la desigualdad $|\alpha|^2\langle f, f\rangle + 2|\alpha||\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle \geq 0$, se sigue que el discriminante de la ecuación cuadrática en α, $|\alpha|^2\langle f, f\rangle + 2|\alpha||\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle = 0$, ha de ser negativo o nulo (¿por qué?). Luego $|\langle f, g\rangle|^2 - \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle \leq 0$, de donde se sigue (5.1.6). ■

Teorema 5.1.7 *Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.*

Demostración: Los dos primeros axiomas de la definición de norma 4.2.1 son inmediatos. Para probar el tercero nótese que

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \langle f + g, g + g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \langle g, g\rangle \\ &\leq \langle f, f\rangle + 2|\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle \leq \langle f, f\rangle + 2\sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle} + \langle g, g\rangle \\ &= (\sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle})^2,\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.1.2). Tomando ahora raíces cuadradas se sigue el resultado. ■

De lo anterior se sigue que todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

[2]Para los casos de $\mathbb{C}^n$, ℓ^2 y $C([a, b])$ discutidos antes esta desigualdad no es más que la desigualdad de Hölder.

Así, por ejemplo, en $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, en ℓ^2, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$, y en $C([a,b])$ es $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$. Además, en cada caso la métrica inducida es la correspondiente a los ejemplos 3.1.5, 3.1.12 ($p = 2$) y 3.1.10 ($p = 2$) del capítulo 3, respectivamente.

Ejercicio 5.1.8 *Prueba que, en la norma inducida por el producto escalar, las operaciones adición de vectores, multiplicación por un escalar y producto escalar de vectores son continuas, i.e., si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, entonces $x_n + y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y$, $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$, y $\langle x_n, y_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$.* ***Ayuda:*** *Para el último escribe $\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y - y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y_n\rangle$ y usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz* (5.1.2).

La primera parte es consecuencia de la continuidad de la norma. Para la segunda usamos que

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\le |\langle x_n - x, y - y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y_n\rangle| \\ &\le \|x_n - x\|\|y - y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y_n\| \to 0.\end{aligned}$$

■

Es fácil probar (ver Ejercicio 5.1) que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2). \tag{5.1.3}$$

De hecho se tiene la siguiente

Proposición 5.1.9 *Un espacio normado $\mathbb{X}$ real es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$, se cumple la ley del paralelogramo* (5.1.3).

Demostración: Sea la función $f(x,z) := \langle x, z\rangle = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2)$, $z \in \mathbb{X}$, y asumamos que se cumple la ley del paralelogramo (5.1.3). Probemos que se cumplen las cuatro propiedades de la definición 5.1.1.

Está claro de la definición de f que $\langle x, z\rangle = \langle z, x\rangle$, luego se tiene el punto 1 de la Definición 5.1.1.

Calculemos ahora la cantidad

$$\begin{aligned}&f(x+y,z) + f(x-y,z) = \\ &\frac{1}{4}\left[\underbrace{\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2}_{\text{en (5.1.3) } a = x+z,\ b = y.} - \underbrace{\left(\|x+y-z\|^2 + \|x-y-z\|^2\right)}_{\text{en (5.1.3) } a = x-z,\ b = y.}\right] \\ &\qquad = \frac{1}{2}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) = 2f(x,z),\end{aligned}$$

i.e.,

$$f(x+y,z) = 2f(x,z) - f(x-y,z) \Rightarrow \langle x+y,z\rangle + \langle x-y,z\rangle = 2\langle x,z\rangle. \quad (5.1.4)$$

Probemos ahora que $\langle \lambda x, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle$. Primero lo probamos para $\lambda = n \in \mathbb{N}$. Está claro que se cumple para $n = 1$. Para $n = 2$ se sigue de (5.1.4) aplicándola con $x = y$ y teniendo en cuenta que $f(0,z) = 0$. Asumamos que la igualdad $f(kx,z) = kf(x,z)$ es cierta para $k = 1, 2, \ldots, n$ y demostremos que es cierta para $k = n+1$. En efecto,

$$\begin{aligned} f((n+1)x,z) &= f(nx+x,z) = 2f(nx,z) - f(nx-x,z) \\ &= 2nf(x,z) - (n-1)f(x,z) = (n+1)f(x,z). \end{aligned}$$

Probemos ahora que $\langle \lambda x, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle$ es cierto para $\lambda \in \mathbb{Q}$. Como $f(-x,z) = -f(x,z)$ por definición, basta probarlo para $\lambda = n/m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Ahora bien, de la identidad $f(nx,z) = nf(x,z)$, $n \in \mathbb{N}$ implica

$$\|nx+z\|^2 - \|nx-z\|^2 = n\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2, \quad \forall x, z \in \mathbb{X}. \quad (5.1.5)$$

Luego

$$f\left(\frac{n}{m}x, z\right) = \frac{1}{4}\left(\left\|\frac{n}{m}x+z\right\|^2 - \left\|\frac{n}{m}x-z\right\|^2\right) = \frac{\|nx+mz\|^2 - \|nx-mz\|^2}{4m^2},$$

de donde usando (5.1.5) dos veces (la segunda intercambiando en (5.1.5) x y z) tenemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{m}x, z\right) &= \frac{n}{4m^2}(\|x+mz\|^2 - \|x-mz\|^2) = \frac{n}{4m}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) \\ &= \frac{n}{m}f(x,z). \end{aligned}$$

Finalmente, usamos que la norma es una función continua y que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, luego para todo número real λ, existe una sucesión de números racionales λ_n tal que $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$, entonces

$$f(\lambda x, z) = f\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n x, z\right) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n x, z) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n f(x,z) = \lambda f(x,z),$$

que era lo que se pretendía probar. Así, f cumple con el punto 3 de la Definición 5.1.1.

Probemos que $f(x,z)$ es lineal en su primera variable, i.e., $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$. Para ello reescribimos (5.1.4) como $f(u+v,z) + f(u-$

$v, z) = 2f(u, z)$ y hacemos $u + v = 2x$ y $u - v = 2y$, luego $u = x + y$, y por tanto $f(2x, z) + f(2y, z) = 2f(x+y, z)$, de donde, usando la linealidad de la multiplicación por un escalar, se tiene la linealidad de la suma de vectores, i.e., se tiene el punto 2 de la Definición 5.1.1.

Finalmente, por la propia definición de f y de las propiedades de la norma se sigue que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$ y sólo es cero si $x = 0$, luego se cumple el punto 4 de la Definición 5.1.1. ■

La proposición anterior nos dice que la ley del paralelogramo (5.1.3) caracteriza los espacios euclídeos. El caso complejo es algo más complicado de probar. La demostración original se debe a P. Jordan y J. von Neuman (*Annals of Math.* **36**, 719–723)[3] y se basa en probar que la cantidad

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

define un producto escalar en $\mathbb{X}$ complejo, lo cual dejamos como ejercicio al lector.

Definición 5.1.10 *Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo*[4] *se denomina espacio de Hilbert y lo denotaremos por $\mathbb{H}$.*

Definición 5.1.11 *Sea el sistema de vectores $(\phi_n)_n$ (finito o infinito) de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$. Diremos que $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos si para todos n, m*

$$\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \delta_{n,m}\|\phi_n\|^2. \tag{5.1.6}$$

Si además $\|\phi_n\| = 1$ para todo n, se dice que el sistema es ortonormal.

Por ejemplo, el sistema de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

[3] Ver el Teorema 11.1 pág. 244 de [9].

[4] Es decir, un espacio $\mathbb{E}$ donde cualquier sucesión de Cauchy converge a un vector de $\mathbb{E}$ (en la métrica inducida por el producto escalar).

es un sistema ortonormal. Análogamente, el sistema $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\dots), \\ e_2 &= (0,1,0,0,\dots), \\ e_n &= (0,0,1,0\dots), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

es un sistema ortonormal de ℓ^2. Finalmente, el sistema de funciones $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos de $C_2([-\pi,\pi])$, i.e., del espacio euclídeo de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ejercicio 5.1.12 *Prueba que si los vectores (no nulos) $\phi_1,\dots,\phi_n$ de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.*

Supongamos que son linealmente dependientes. Entonces existe al menos un escalar $\alpha_k \neq 0$, $k = 1,\dots,n$ tal que $\phi := \alpha_1\phi_1 + \cdots \alpha_n\phi_n = 0$. Usando la linealidad del producto escalar así como que los vectores $\phi_1,\dots,\phi_n$ son ortogonales obtenemos $0 = \langle \phi, \phi_k\rangle = \alpha_k$, $k = 1,\dots,n$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 5.1.13 (Gram-Schmidt) *En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (ortogonales).*

Demostración: Para probar el teorema tomamos un sistema de vectores linealmente independiente $(\phi_n)_n$ de $\mathbb{H}$ cualquiera y definimos un nuevo sistema de vectores $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

1. Tomamos $\psi_1 = \phi_1/\|\phi_1\|$.
2. A continuación escogemos $\tilde{\psi}_2$ de la forma

$$\tilde{\psi}_2 = \phi_2 + \alpha_{2,1}\psi_1,$$

donde $\alpha_{2,1}$ es tal que $\tilde{\psi}_2$ sea ortogonal al vector ϕ_1, i.e. $\langle \psi_1, \psi_2\rangle = 0$, de donde se deduce que $\alpha_{2,1} = -\langle \psi_1, \phi_2\rangle$. Entonces $\psi_2 = \tilde{\psi}_2/\|\tilde{\psi}_2\|$ es ortonormal a ϕ_1.

3. Paso n. Escogemos $\tilde{\psi}_k$, $k \geq 3$, de la forma

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\psi_k,$$

donde los coeficientes $\alpha_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n-1$ son tales que $\tilde{\psi}_n$ sea ortogonal a todos los vectores ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, anteriores. Usando la ortogonalidad es fácil comprobar que $\alpha_{n,k} = -\langle \psi_k, \phi_n \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Finalmente definimos $\psi_n = \tilde{\psi}_n / \|\tilde{\psi}_n\|$ que es ortonormal a todos los vectores anteriores ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Y así sucesivamente. ■

El proceso anterior se denomina *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*. De lo anterior se sigue que, para cada $n \geq 2$ ($\tilde{\psi}_1 = \phi_1$),

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\tilde{\psi}_k \Rightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k}\tilde{\psi}_k,$$

de donde se deduce que los subespacios generados por los vectores $(\phi_n)_n$ y $(\psi_n)_n$ coinciden, i.e.. $\operatorname{span}(\psi_1, \ldots, \psi_p) = \operatorname{span}(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ para todo p. Además, se tiene la propiedad

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 1, \ldots n-1 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 1, \ldots n-1.$$

De hecho, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 5.1.14 *Los vectores ortonormales ψ_n, $n \geq 1$, se pueden calcular mediante la siguiente expresión explícita:*

$$\psi_n = \frac{\det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}, \tag{5.1.9}$$

donde $\Delta_n := \Delta_n(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ para $n \geq 1$ y denota al determinante de Gram de los vectores $\phi_1, \ldots, \phi_n$, definido por (definiremos $\Delta_0 := 1$)

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_2, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}. \tag{5.1.10}$$

Demostración: En efecto, si denotamos por $\tilde{\psi}_n$ al numerador de (5.1.9), tenemos que el producto escalar $\langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, ya que el determinante resultante de calcular dicho producto escalar tiene dos columnas iguales. Por otro lado, de (5.1.9) se sigue que

$$\tilde{\psi}_n = \Delta_{n-1}\phi_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\phi_k,$$

luego

$$\langle \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n \rangle = \Delta_{n-1}\langle \phi_n, \tilde{\psi}_n \rangle = \Delta_{n-1}\Delta_n, \tag{5.1.11}$$

de donde se sigue (5.1.9). ■

Nótese que de (5.1.11) y teniendo en cuenta que $\Delta_0 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle > 0$ se sigue que $\Delta_n > 0$, para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5.1.15 *Prueba que un conjunto de vectores $\phi_i \in \mathbb{H}$ de un espacio euclídeo, $i = 1, \ldots, p$, son linealmente independientes si y sólo si su determinante de Gram*

$$\det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_p \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_p, \phi_1 \rangle & \langle \phi_p, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_p, \phi_p \rangle \end{vmatrix} \neq 0.$$

es distinto de cero.

Si los vectores son dependientes, existen unos escalares α_k, no todos nulos, tales que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k = 0$, pero entonces

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

luego las filas del determinante de Gram son dependientes y por tanto el determinante es cero. Por el contrario, si el determinante de Gram es cero, entonces las filas tienes que ser linealmente dependientes, luego existirán los escalares α_k, $k = 1, \ldots, p$, no todos nulos, tales que, para $j = 1, \ldots, p$

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0 \quad \Rightarrow \left\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k, \phi_j \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \overline{\alpha_j} \left\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k, \phi_j \right\rangle = 0$$

y, por tanto,

$$0 = \sum_{j=1}^{p} \overline{\alpha_j} \left\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k, \phi_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_j \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k \right\|^2 = 0,$$

es decir, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \phi_k = 0$, luego los vectores $\phi_1, \ldots, \phi_p$ son linealmente dependientes. ■

Teorema 5.1.16 *Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.*

Demostración: Asumamos sin pérdida de generalidad que el sistema $(\psi_n)_n$ es ortonormal. Entonces $\|\psi_n - \psi_m\| = \sqrt{2}$ si $n \neq m$. Sea el conjunto de las bolas de radio $1/2$ y centro en cada ψ_n, $B(\psi_n, 1/2)$. Estas bolas no se interceptan, luego en cada bola hay un único vector ψ_n de nuestro sistema ortonormal. Sea ahora $(\phi_k)_k$ un conjunto numerable denso en $\mathbb{E}$ (pues éste es separable). Entonces, en cada bola $B(\psi_n, 1/2)$ habrá al menos un ϕ_k, luego el número de bolas y por tanto el de elementos ψ_n es numerable. ■

En adelante estudiaremos las propiedades de los espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ separables. Nótese que, en virtud del teorema anterior, en estos espacios los sistemas ortogonales son numerables.

5.2. Espacios de Hilbert separables

En este apartado asumiremos que el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es separable.

Definición 5.2.1 *Dado un vector $x \in \mathbb{H}$ definiremos la serie de Fourier respecto al sistema ortonormal $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ a la serie*

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \tag{5.2.1}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$c_n = \langle x, \phi_n \rangle, \quad \forall n \geq 1. \tag{5.2.2}$$

Teorema 5.2.2 *Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores ortonormales $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n)$. Sea $x \in \mathbb{H}$. Entonces,*

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

donde c_k son los coeficientes definidos en (5.2.2) y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie de Fourier (5.2.1)

$$q = s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k.$$

Demostración: Sea $g_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$. Calculamos

$$\begin{aligned} \|x - g_n\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} a_k, x - \sum_{m=1}^{n} a_m \phi_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\overline{a_k} c_k + a_k \overline{c_k}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_k \overline{a_m} \langle \phi_k, \phi_m \rangle \qquad (5.2.3) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2. \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\langle \phi_k, \phi_m \rangle = \delta_{k,m} \quad \text{y} \quad \overline{a_k} c_k + a_k \overline{c_k} = |a_k|^2 + |c_k|^2 - |a_k - c_k|^2.$$

Obviamente la expresión anterior (5.2.3) es mínima si y sólo si $a_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, i.e., $g_n = s_n$. ■

Como corolario de lo anterior tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2, \qquad (5.2.4)$$

por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge (¿por qué?) y, por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} |c_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \langle x, \phi_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \phi_n, x \rangle = 0. \qquad (5.2.5)$$

La desigualdad (5.2.4) se conoce como **desigualdad de Bessel**. Nótese que una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier (5.2.1) converja a x (en norma) es que

$$\|x - s_n\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2.$$

Esta igualdad se conoce como **igualdad de Parseval** y es, en general, muy complicada de comprobar.

Definición 5.2.3 *Se dice que un sistema de vectores linealmente independientes* $(\phi_n)_n$ *es completo*[5] *en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *si para todo vector* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *y cualquiera sea* $\epsilon > 0$ *existe una combinación lineal*

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \quad \textit{tal que} \quad \|x - l_n\| < \epsilon\,.$$

En otras palabras cualquier vector $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ se puede aproximar en norma tanto como se quiera mediante alguna combinación finita de vectores del sistema $(\phi_n)_n$. O, equivalentemente, sea $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \dots)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de $(\phi_n)_n$, entonces $(\phi_n)_n$ es completo en $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ si el conjunto $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots) \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$. La definición anterior 5.2.3 es equivalente a decir que $\mathbb{X}$ es el menor subespacio vectorial cerrado que contiene al conjunto $\phi_1, \phi_2, \dots$ ($(\phi_n)_n$ genera a todo $\mathbb{X}$).

Definición 5.2.4 *Un sistema ortogonal (ortonormal) completo de* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *se denomina base ortogonal (ortonormal) de* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.

Por ejemplo, los sistemas $(e_k)_k$ definidos por (5.1.7) y (5.1.8) son bases ortogonales completas de $\mathbb{C}^n$ y ℓ^2, respectivamente.

Teorema 5.2.5 (De los sistemas completos) *Sea* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sea el sistema ortonormal de vectores* $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* $\mathbb{H}$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(\phi_n)_n$ *es completo en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.
2. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$.
3. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, *se cumple la igualdad de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2. \tag{5.2.6}$$

[5] También se suele denominar sistema total.

4. *Si* $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $x = 0$.

Demostración: 1) $\Leftrightarrow$ 2) Cualquiera sea $x \in \mathbb{H}$ construimos la serie de Fourier (5.2.1) y sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ sus sumas parciales.

1) $\Rightarrow$ 2) Usando 1) tenemos que $\forall \epsilon > 0$ existe una combinación lineal l_N de vectores de $(\phi_n)_n$ tales que $\|x - l_N\| < \epsilon$ (ver definición 5.2.3). Pero el teorema 5.2.2 nos dice que el menor de todos los valores de $\|x - l_N\|$ se alcanza cuando $l_N = s_N$, siendo s_N la N-ésima suma parcial de Fourier, i.e., $\|x - s_N\| \leq \|x - l_N\|$. Luego,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x - s_N\| < \epsilon.$$

Pero para todo $n > N$, $\|x - s_n\| \leq \|x - s_N\|$. En efecto, de la identidad de la derecha en (5.2.4) tenemos

$$\begin{aligned} \|x - s_n\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 - \sum_{k=N+1}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|x - s_N\|^2 - \sum_{k=N+1}^{n} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Entonces, para todo $n > N$, $\|x - s_n\| \leq \epsilon$, es decir, $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, de donde se sigue 2). Obviamente 2) implica 1) (¿por qué?).

2)$\Rightarrow$3) Tomando el límite $n \to \infty$ en la identidad de la derecha en (5.2.4) se obtiene $\|x - s_n\| = \|x\| - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, de donde usando 2) ($\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0$), se sigue 3).

3)$\Rightarrow$4) Si para todo $k \in \mathbb{N}$, $\langle x, \phi_k \rangle = 0$, entonces de 3) se deduce que $\|x\| = 0$, luego $x = 0$.

4)$\Rightarrow$2) Recordemos que el sistema $(\phi_n)_n$ es ortonormal. Sea $y_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$, $c_k = \langle x, \phi_k \rangle$. Usando la desigualdad de Bessel (5.2.4) se sigue que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ es una serie convergente y por tanto la cantidad

$$\|y_n - y_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2,$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera, i.e., la sucesión y_n es de Cauchy, luego es convergente. Sea y su límite. Probemos que $y = x$.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.1.2)

$$|\langle y, \phi_k\rangle - \langle y_n, \phi_k\rangle| = |\langle y - y_n, \phi_k\rangle| \leq \|y_n - y\|\|\phi_k\|,$$

deducimos que $\lim_{n\to\infty}\langle y_n, \phi_k\rangle = \langle y, \phi_k\rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero

$$\langle y_n, \phi_k\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_k\phi_k, \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle x, \phi_j\rangle\langle \phi_k, \phi_j\rangle = \langle x, \phi_k\rangle, \quad \forall k \leq n,$$

luego $\langle x - y_n, \phi_k\rangle = 0$ para todo $k \leq n$ de donde, tomando $n \to \infty$ deducimos que $\langle x - y, \phi_k\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego por 4) $x - y = 0$. ■

Nota 5.2.6 *La equivalencia entre 1 y 2, así como las implicaciones* $2 \to 3 \to 4$*, son también ciertas para espacios euclídeos cualesquiera (no necesariamente completos).*

Del apartado 4 del Teorema 5.2.5 se sigue el siguiente corolario:

Corolario 5.2.7 *Sea el sistema ortonormal completo* $(\phi_n)_n$ *y sean* $x, y \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *tales que* $\langle x, \phi_k\rangle = \langle y, \phi_k\rangle$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces* $x = y$*.*

En otras palabras, dos elementos de $\mathbb{H}$ con iguales coeficientes de Fourier son iguales, por tanto cualquier vector de $\mathbb{H}$ queda **biunívocamente** determinado por sus coeficientes de Fourier.

Definición 5.2.8 *Se dice que un sistema ortonormal* $(\phi_n)_n$ *es cerrado en un espacio euclídeo* $\mathbb{E}$ *si para todo vector* $x \in \mathbb{E}$ *se cumple la igualdad de Parseval* (5.2.6) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k\rangle|^2 = \|x\|^2$.

De la definición anterior y el Teorema 5.2.5 se tiene que un un sistema ortonormal $(\phi_n)_n$ es completo en un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ si y sólo si $(\phi_n)_n$ es cerrado en $\mathbb{H}$.

Teorema 5.2.9 *Todo espacio de Hilbert* $\mathbb{H}$ *separable tiene una base ortonormal.*

Demostración: Como $\mathbb{H}$ es separable, existe un conjunto numerable de vectores $(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$. Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H}$, entonces obviamente $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$ (recordemos que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los $(\phi_n)_n$). Si de dicho conjunto $(\phi_n)_n$ eliminamos aquellos vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores ϕ_j, $j < k$, obtenemos un nuevo sistema sistema $(\phi_{n_k})_k$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$ de vectores que claramente cumplen que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots) = \operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots)$, y por tanto es denso en $\mathbb{H}$, luego $(\phi_{n_k})_k$ es un sistema completo de vectores linealmente independientes de $\mathbb{H}$ (¿por qué?). La base ortonormal $(\psi_k)_k$ se obtiene al aplicar a dicho sistema completo de vectores linealmente independientes $(\phi_{n_k})_k$ el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt pues $\operatorname{span}(\psi_1, \psi_2, \dots) = \operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots)$. ■

El teorema anterior 5.2.9 se puede generalizar a cualquier espacio euclídeo separable (no necesariamente completo).

Como hemos visto, dado un $x \in \mathbb{H}$ y un sistema ortonormal $(\phi_n)_n \in \mathbb{H}$ existen los coeficientes de Fourier de x en dicho sistema ortonormal. El siguiente resultado es el recíproco de lo anterior.

Teorema 5.2.10 (Riesz-Fischer) *Sea $(\phi_n)_n$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sean los números $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Entonces, existe un elemento $x \in \mathbb{H}$ cuyos coeficientes de Fourier son precisamente los números $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle.$$

Demostración: Sea $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$. Como vimos en la prueba del Teorema 5.2.5 la sucesión anterior es de Cauchy y como $\mathbb{H}$ es completo entonces $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x =\in \mathbb{H}$, con $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$. Probemos que entonces $c_k = \langle x, \phi_k \rangle$, $k = 1, 2, \dots$. Para ello notemos que

$$\langle x, \phi_k \rangle = \langle x_n, \phi_k \rangle + \langle x - x_n, \phi_k \rangle.$$

Pero entonces para $n \geq k$, $\langle x - x_n, \phi_k \rangle = 0$. En efecto, como $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$, entonces $x - x_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \phi_k$, luego $\langle x - x_n, \phi_k \rangle = 0$. Luego, para $n \geq$

k, $\langle x, \phi_k \rangle = \langle x_n, \phi_k \rangle$, pero $\langle x_n, \phi_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j, \phi_k \rangle = c_k$, luego para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\langle x, \phi_k \rangle = c_k$, como queríamos probar. [6]Además, como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, usando (5.2.3), se tiene que

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|x - x_n\|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de donde se sigue el teorema. ■

De los teoremas 5.2.5, 5.2.9 y 5.2.10 se deduce que en un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ a cada $x \in \mathbb{H}$ le corresponde una serie de Fourier cuyos coeficientes de Fourier están biunívocamente determinados por x y que además se corresponden con un único vector de ℓ^2. Eso nos conduce a un resultado muy interesante pero para ello necesitamos de la siguiente definición previa:

Definición 5.2.11 *Una aplicación U entre dos espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ se denomina unitaria si U es lineal, biyectiva y preserva el producto escalar, i.e.*[7]*,*

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle_* = \langle x^*, y^* \rangle_*.$$

Los espacios $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ son isomorfos si existe una aplicación unitaria $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^*$ tal que $x^* = Ux$, donde $x \in \mathbb{H}$ y $x^* \in \mathbb{H}^*$.

Teorema 5.2.12 (del isomorfismo) *Cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a ℓ^2.*

Demostración: Como $\mathbb{H}$ es separable, en $\mathbb{H}$ existe una base ortonormal numerable (ver Teorema 5.2.9) que denotaremos por $(\phi_n)_{n\in I}$, donde I es un conjunto numerable (finito o infinito). Asumiremos que I es infinito, ($I = \mathbb{N}$) i.e., probaremos el caso cuando $\mathbb{H}$ es isomorfo a ℓ^2 (el caso finito es totalmente análogo).

Sea $x \in \mathbb{H}$ y sea la aplicación $U : \mathbb{H} \mapsto \ell^2$ definida por

$$x^* = Ux = \sum_{k\in I} \langle x, \phi_k \rangle e_k = \sum_{k\in I} x_k e_k \in \ell^2,$$

[6]De hecho se puede probar directamente que si $x_n \to x$, entonces, $c_k = \langle x, \phi_k \rangle$. Para ello notamos que para todo $n \geq k$, $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, \phi_k \rangle = \langle x, \phi_k \rangle$ (por la continuidad del producto escalar), o usando que $|\langle x_n, \phi_k \rangle - \langle x, \phi_k \rangle| = |\langle x_n - x, \phi_k \rangle| \leq \|x_n - x\| \to 0$, si $n \to \infty$, y, como ya vimos, $\langle x_n, \phi_k \rangle = c_k$.

[7]Se entiende que $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ denota el producto escalar en $\mathbb{H}^*$ que no tiene por que ser el mismo que en $\mathbb{H}$.

donde $(e_n)_n$ denota la base ortonormal canónica de ℓ^2 que ya hemos visto antes. Esta claro que U es biunívoco, pues dada cualquier sucesión $(x_n)_n$ de ℓ^2 por el Teorema de Riesz-Fischer existe un $x \in \mathbb{H}$ cuyos coeficientes de Fourier coinciden con dichos valores x_n y por el Corolario 5.2.7 dicho elemento es único. Además, como el producto escalar $\langle x, y\rangle$ es lineal respecto al elemento de la izquierda (i.e., x), esta claro que U es lineal (probarlo como ejercicio). Finalmente, para probar que U es unitario usamos, por un lado, que

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{k\in I} x_k\phi_k, \sum_{m\in I} y_m\phi_m \right\rangle = \sum_{k\in I} x_k\overline{y_k},$$

y, por el otro, que el producto escalar en ℓ^2 viene dado por $\langle x^*, y^*\rangle_{\ell^2} = \sum_{k\in I} x_k\overline{y_k}$, de donde se sigue que $\langle x, y\rangle = \langle x^*, y^*\rangle_{\ell^2}$. ■

5.2.1. El Teorema de la proyección ortogonal

Definición 5.2.13 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio*[8] *del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^\perp$, al conjunto*

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \ \forall y \in M\}.$$

Nótese que de la definición anterior se sigue que $M \bigcap M^\perp = \{0\}$. Además, si elegimos $M = \mathbb{H}$, entonces $\mathbb{H}^\perp = \{0\}$.

Ejercicio 5.2.14 *Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{E}$.*

La linealidad es inmediata pues si $x_1, x_2 \in M^\perp$, entonces $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$, luego por la linealidad del producto escalar $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = 0$, para todo $y \in M$. Probemos que es cerrado. Para ello probaremos que $M^\perp$ contiene a todos sus puntos límites. Sea x' un punto límite de $M^\perp$. Entonces existe $(x'_n)_n$ una sucesión de $M^\perp$ tal que $\lim_{n\to\infty} x'_n = x' \in \mathbb{H}$. Basta probar que $x' \in M^\perp$ (ver Proposición 3.5.4). Pero

$$\langle x', y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x'_n, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x'_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \forall y \in M,$$

[8] Se entenderá, como el caso de los espacios normados que M es un subespacio *lineal* de $\mathbb{H}$.

i.e., $x' \in M^{\perp}$. ■

Nótese que al ser $M^{\perp}$ cerrado, es completo (pues $\mathbb{H}$ es completo, ver Teorema 3.5.14).

Teorema 5.2.15 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y $M^{\perp}$ su complemento ortogonal. Entonces, todo vector $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación de la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$.*

Demostración: Como $\mathbb{H}$ es separable y $M \subset \mathbb{H}$ es cerrado en $\mathbb{H}$, entonces M es completo (ver Teorema 3.5.14) y separable (ver el ejercicio 3.4.7), i.e., M es a su vez un espacio de Hilbert separable por lo que existe una base ortonormal completa $(\phi_n)_n$ de M (ver teorema 5.2.9). Definamos $y = \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$. Obviamente $y \in M$. Definamos $y^{\perp} = x - y$. Entonces, para todo n, $\langle y^{\perp}, \phi_n \rangle = 0$. Ahora bien, cualquiera sea $\tilde{y} \in M$, $\tilde{y} = \sum_n a_n \phi_n$, luego $\langle y^{\perp}, \tilde{y} \rangle = 0$, es decir $y^{\perp} \in M^{\perp}$. Luego cualquiera sea $x \in \mathbb{H}$, existen $y \in M$ y $y^{\perp} \in M^{\perp}$ tales que $x = y + y^{\perp}$. Probemos que esta descomposición es única. Para ello supongamos que no, i.e., supongamos que existen un $y' \in M$, $y' \neq y$ tal que $x = y' + y'^{\perp}$, $y'^{\perp} \in M^{\perp}$ (y obviamente distinta de $y^{\perp}$). Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle y', \phi_n \rangle = \langle x - y'^{\perp}, \phi_n \rangle = \langle x, \phi_n \rangle = \langle y + y^{\perp}, \phi_n \rangle = \langle y, \phi_n \rangle \quad \Rightarrow \quad y' = y,$$

(ver teorema 5.2.5) lo que es una contradicción. ■

Si todo elemento de $\mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$, M cerrado, e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe como

$$\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}. \tag{5.2.7}$$

Lo anterior nos permite reescribir el teorema 5.2.15 en una forma equivalente.

Teorema 5.2.15 *Sea un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de $\mathbb{H}$. Entonces $\mathbb{H}$ se puede escribir como suma directa de M y $M^{\perp}$, i.e., se tiene* (5.2.7).

Nótese que si en (5.2.7) elegimos $M = \mathbb{H}$ obtenemos que $\mathbb{H} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}^{\perp} = \mathbb{H} \oplus \{0\}$.

Es *fácil* ver que la noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

Está claro que si $x \in M \subset \mathbb{H}$, entonces $x \perp M^{\perp}$, luego $x \in (M^{\perp})^{\perp}$ y, por tanto, $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

Ejercicio 5.2.16 *Probar que si M es cerrado, entonces $(M^\perp)^\perp = M$.*

Como ya vimos cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$, $M \subset (M^\perp)^\perp$. Sea $x \in (M^\perp)^\perp$ cualquiera. Como M es cerrado entonces, por el teorema anterior 5.2.15 (ver (5.2.7)) se tiene que $x = y + y^\perp$ con $y \in M \subset (M^\perp)^\perp$ y $y^\perp \in M^\perp$. Pero, por otro lado, $y^\perp = x - y \in (M^\perp)^\perp$ ($y \in M \subset (M^\perp)^\perp$) de donde se sigue que $y^\perp \perp M^\perp$, o sea, $\langle y^\perp, y^\perp \rangle = 0$ (recuérdese que $y^\perp \in M^\perp$), i.e., $y^\perp = 0$, luego $x = y \in M$. Como x era arbitrario, se tiene $(M^\perp)^\perp \subset M$, de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 5.2.17 (de la proyección ortogonal) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea $M \subset \mathbb{H}$ un espacio generado por ciertos vectores linealmente independientes de $\mathbb{H}$, i.e., $M = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_p)$, y sea x un vector de $\mathbb{H}$ dado. Entonces existe un único $y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in M$. Además existe dicho $y \in M$ si y sólo si $\langle x - y, m \rangle = 0$, para todo $m \in M$.*

Demostración: Si $x \in M$ tomamos $y = x$ y el teorema es trivial. Así que asumiremos que $x \notin M$. Sea $\delta = \inf_{m \in M} \|x - m\|$. Entonces existe una sucesión $(y_n)_n \in M$ tal que $\|x - y_n\| \to \delta$. Probemos que $(y_n)_n$ es de Cauchy. Para ello usamos la regla del paralelogramo (5.1.3)

$$\begin{aligned}
&\|(y_n - x) + (x - y_k)\|^2 + \|(y_n - x) - (x - y_k)\|^2 \\
&\qquad\qquad = 2\|(y_n - x)\|^2 + 2\|(x - y_k)\|^2 \quad \Rightarrow \\
&\|y_n - y_k\|^2 = 2\|(y_n - x)\|^2 + 2\|(x - y_k)\|^2 - 4\left\|\frac{y_n}{2} + \frac{y_k}{2} - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{y_n}{2} + \frac{y_k}{2} \in M \quad \Rightarrow \left\|\frac{y_n}{2} + \frac{y_k}{2} - x\right\|^2 \geq \delta^2,$$

luego,

$$\|y_n - y_k\|^2 \leq 2\|(y_n - x)\|^2 + 2\|(x - y_k)\|^2 - 4\delta^2,$$

de donde se sigue, tomando límites $n, k \to \infty$ que $\|y_n - y_k\|^2 \to 0$.

Por el corolario 4.3.3 M es cerrado (es de dimensión finita) y por tanto es completo (ver teorema 3.5.14) entonces $y_n \to y \in M$. Luego existe un $y \in M$ tal que $\delta = \|y - x\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|$.

Probemos que y es único. Asumamos que existe un $z \neq y$ tal que $\delta = \|z - x\|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|y - z\|^2 &= 2\|(y - x)\|^2 + 2\|(x - z)\|^2 - 4\left\|\frac{y}{2} + \frac{z}{2} - x\right\|^2 \\
&= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{y}{2} + \frac{z}{2} - x\right\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0,
\end{aligned}$$

pues $\left\|\frac{y}{2}+\frac{z}{2}-x\right\|^2 \geq \delta^2$ ya que $\frac{y}{2}+\frac{z}{2} \in M$. Luego $x = y$ lo que es una contradicción.

Probemos ahora que $\langle x-y, m\rangle = 0$, para todo $m \in M$, i.e., $(x-y)\perp M$. Para ello supongamos que existe un $m \in M$ que no es ortogonal a $x-y$. Asumiremos que $\|m\| = 1$. Sea el vector $m_1 = y+\lambda m$, con $\lambda = \langle x-y, m\rangle \neq 0$, y siendo y es vector de antes que minimiza el error $\|x-m\|$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x-m_1\|^2 = \|x-y-\lambda m\|^2 &= \|x-y\|^2 - \langle x-y, \lambda m\rangle - \langle \lambda m, x-y\rangle + |\lambda|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - |\lambda|^2 \leq \|x-y\|^2,\end{aligned}$$

i.e., y no es el vector que minimiza el error, lo cual es una contradicción

Finalmente, notemos que cualquiera sea $m \in M$, si $x-y$ ortogonal a todos los $m \in M$, como $m-y \in M$, entonces usando el teorema de Pitágoras (ver el problema 5.4)

$$\|x-m\|^2 = \|(x-y)-(m-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-m\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Es decir, $\|x-m\| > \|x-y\|$ para todo $m \neq y$, i.e., y es el único vector óptimo. ■

El teorema anterior nos dice que si buscamos el vector y más cercano a un vector $x \in \mathbb{H}$ dado como combinación lineal de los vectores generadores de $M = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_p)$, i.e., $y = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k$, entonces el $\min_{m\in M} \|x-m\|$ se alcanza cuando $x-y$ es ortogonal a cada uno de los y_j, $j = 1, \ldots, p$. Luego

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k, y_j \right\rangle = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, p.$$

Eso nos conduce al siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, y_k\rangle \alpha_j = \langle x, y_k\rangle, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{5.2.8}$$

La matriz de este sistema coincide con la matriz de Gram de los vectores $y_1, \ldots, y_p$ (ver el Teorema 5.1.13 y la discusión posterior). El sistema anterior (5.2.8) se conoce como *sistema normal*. Nótese que el sistema anterior tiene solución (podemos encontrar los α_i, $i = 1, \ldots, p$) si el determinante de la matriz de Gram es distinto de cero. Pero dicho determinante es

distinto de cero si y solo si los vectores y_i, $i = 1, \ldots, p$ son linealmente independientes (ver ejercicio 5.1.15).

Tomemos ahora un $x \in \mathbb{H}$ dado y sea $\delta = \text{mín}_{m \in M} \|x - m\| = \|x - y\|$. Entonces

$$\delta^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x \rangle,$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle y_j, x \rangle + \delta^2 = \langle x, x \rangle.$$

Juntando esta última ecuación con sistema normal (5.2.8) obtenemos el sistema lineal de $p + 1$ ecuaciones con $p + 1$ incógnitas

$$\begin{pmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_p, y_1 \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_p \rangle & \cdots & \langle y_p, y_p \rangle & 0 \\ \langle y_1, x \rangle & \cdots & \langle y_p, x \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, y_p \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior podemos encontrar no solo los coeficientes α_k, y por tanto el vector y, donde se alcanza el mínimo $\text{mín}_{m \in M} \|x - m\|$, sino también el valor δ del mismo. De hecho usando la regla de Cramer obtenemos

$$\delta^2 = \frac{\Delta_{p+1}(y_1, \ldots, y_p, x)}{\Delta_p(y_1, \ldots, y_p)},$$

donde $\Delta_n(v_1, \ldots, v_k)$ es el determinante de Gram de los vectores $v_1, \ldots, v_k$ (5.1.10).

Veamos una aplicación de lo anterior.

Ejercicio 5.2.18 *Sean m números reales $x_1, \ldots, x_m$ y sea una matriz $m \times n$, W con $n < m$ cuyas columnas son linealmente independientes. Encontrar el vector $z \in \mathbb{R}^n$ tal que la norma euclídea $\|x - Wz\|$ sea mínima, i.e., queremos encontrar el mejor estimador lineal de $x \in \mathbb{R}^m$.*

Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert podemos usar el teorema de las proyecciones 5.2.17. Luego existe un $y = Wz$ único que resuelve nuestro problema. Para encontrarlo basta usar el sistema de ecuaciones normal (5.2.8). Un cálculo directo nos da que la matriz de Gram es $W^T W$ y que

el vector correspondiente al término independiente $\langle x, y_k \rangle$ es $W^T x$, donde W^T es la matriz traspuesta de W. Así que nuestro sistema se escribe como

$$W^T W z = W^T x \quad \Rightarrow z = (W^T W)^{-1} W^T x,$$

pues al ser las columnas de W linealmente independientes, existe la inversa de $W^T W$. ■

Otras aplicaciones interesantes se pueden encontrar en [7].

5.2.2. El teorema de representación de Riesz

Para terminar este capítulo demostraremos un teorema sobre funcionales lineales acotados.

Definición 5.2.19 *Un funcional lineal es una aplicación lineal $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$ siendo $\mathbb{K}$ el conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.*

Teorema 5.2.20 (de representación de Riesz) *Cualquier funcional lineal acotado sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$, ($\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) se puede representar en términos de un producto escalar, i.e.,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \tag{5.2.9}$$

donde z depende de f y esta unívocamente determinado por f y su norma satisface la ecuación

$$\|z\| = \|f\|. \tag{5.2.10}$$

Demostración: Si $f = 0$ el teorema es trivial tomando $z = 0$. Supongamos que f no es 0, cuyo caso obviamente $z \neq 0$. Está claro que si (5.2.9) es cierta, entonces $f(x) = 0$ para todo x tal que $\langle x, z \rangle = 0$, o sea para todo x perteneciente al espacio nulo de f (que denotaremos por $\mathcal{N}$) se tiene que $z \perp x$, i.e., $z \in \mathcal{N}^\perp$. Dado que f es no nula, entonces $\mathcal{N} \neq \mathbb{H}$ (¿por qué?). Pero $\mathcal{N}$ es un subespacio vectorial cerrado[9] de $\mathbb{H}$ y el teorema 5.2.15 nos asegura que $\mathbb{H} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$, luego $\mathcal{N}^\perp \neq \emptyset$, por tanto existe un $z_0 \in \mathcal{N}^\perp$,

[9] Sea $x \in \overline{\mathcal{N}}$. Existe una $(x_n)_n \in \mathcal{N}$ tal que $x_n \to x$. Pero $f(x_n) \to f(x)$, pues f es acotado. Como $f(x_n) = 0$, $f(x) = 0$, de donde se sigue que $x \in \mathcal{N}$.

$z_0 \neq 0$ y que, sin pérdida de generalidad tomaremos normalizado a la unidad $\langle z_0, z_0\rangle = 1$. Construyamos un vector v tal que $\forall x \in \mathbb{H}$

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x \quad \Rightarrow \quad f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad v \in \mathcal{N}.$$

Pero entonces, $z_0 \perp v$, pues $z_0 \in \mathcal{N}^\perp$ y, por tanto,

$$0 = \langle v, z_0\rangle = f(x) - f(z_0)\langle x, z_0\rangle \quad \Rightarrow \quad f(x) = \langle x, \overline{f(z_0)}z_0\rangle,$$

luego existe un $z \in \mathbb{H}$ tal que se tiene 5.2.9 para todo $x \in \mathbb{H}$.

Demostremos que dicho z es único. Sean $y \neq z$ tal que, para todo $x \in \mathbb{H}$, $f(x) = \langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$. Por el punto 4 del ejercicio 5.1.2 tenemos que $z = y$ lo que es una contradicción.

Probemos ahora (5.2.10). En primer lugar sabemos que f es acotada y se cumple (5.2.9). Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.1.2) tenemos, efectivamente, $|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|z\|\|x\|$, luego tomando el supremo en los $x \in \mathbb{H}$ con $\|x\| = 1$ tenemos

$$\|f\| := \sup_{\|x\|=1} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|z\|,$$

de donde además se deduce que para todo $x \in \mathbb{H}$, $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Si en esta última desigualdad tomamos $x = z$ obtenemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = |f(z)| \leq \|f\|\|z\| \quad \Rightarrow \quad \|z\| \leq \|f\|$$

de donde se deduce que $\|f\| = \|z\|$. ■

Como veremos más adelante, este teorema juega un papel esencial en la teoría de operadores en espacios de Hilbert.

5.3. Problemas

Problema 5.1 Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*.

Solución: Basta usar que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ y usar las propiedades del producto escalar 5.1.1. ■

Problema 5.2 Prueba que en el caso complejo un espacio normado es euclídeo si se tiene la ley del paralelogramo (5.1). Para ello hay que probar que la cantidad

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

define un producto escalar en $\mathbb{X}$ complejo.

Solución: La prueba es similar al caso real (ver la proposición 5.1.9). Ver e.g. [9, Teorema 11.1, pág. 244] . ■

Problema 5.3 Usando el ejercicio 5.1 prueba que los espacios normados $\mathbb{R}^n_p$, ℓ^p y $C([a,b])^p$ correspondientes al ejercicio 4.2.4 y los ejemplos 4.2.7 y 4.2.5 no son espacios euclídeos salvo para $p = 2$.

Solución: Para ver que no son euclídeos usaremos la proposición 5.1.9, luego mostraremos que no se cumple la ley del paralelogramo.

Comenzamos con $\mathbb{R}^n_p$. Sean los vectores $x = (1, 0, ..., 0), y = (0, 1, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Tenemos por un lado que $2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 2((1^p)^{\frac{2}{p}} + (1^p)^{\frac{2}{p}}) = 4$, y por el otro, $\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{p}}$. Luego, usando (5.1.3) tenemos que $4 = 2 \cdot 4^{\frac{1}{p}}$ lo cual es falso si $p \neq 2$.

Para ℓ^p, podemos las sucesiones $x = (1, 0, 0, \dots), y = (0, 1, 0, \dots) \in l^p$ y obtenemos el mismo resultado.

Veamos ahora el espacio $C^p_{[a,b]}$. Lo que haremos es encontrar dos funciones continuas con soporte compacto disjunto y con la misma norma, así su suma y su diferencia también tendrán la misma norma. De esta forma consideramos las siguientes funciones (ver la figura 5.1):

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [a, \frac{a+b}{4}), \\ \frac{a+b}{2} - x, & x \in [\frac{a+b}{4}, \frac{a+b}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, \frac{a+b}{2}), \\ x - \frac{a+b}{2}, & x \in [\frac{a+b}{2}, \frac{3(a+b)}{4}), \\ b - x, & x \in [\frac{3(a+b)}{4}, b]. \end{cases}$$

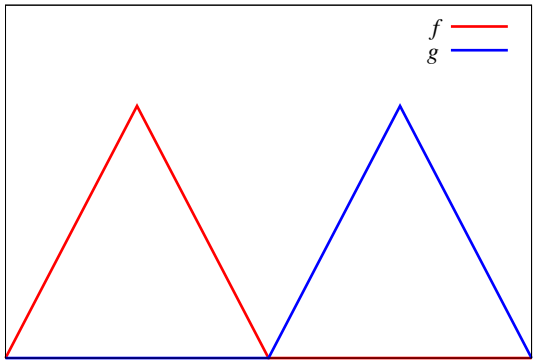


Figura 5.1: Las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Usando las simetrías de f y g para calcular las normas tenemos:

$$2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) = 4\|f\|_p^2 = 4\Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}} = 4\Big(2\int_a^{\frac{a+b}{4}} x^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}} =$$
$$= 4\cdot 4^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^{\frac{a+b}{4}} x^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}}$$
$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\|f+g\|_p^2 = 2\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}} =$$
$$= 2\Big(4\int_a^{\frac{a+b}{4}} x^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}} = 2\cdot 4^{\frac{2}{p}}\Big(\int_a^{\frac{a+b}{4}} x^p\,dx\Big)^{\frac{2}{p}}.$$

Luego, como $4\cdot 4^{\frac{1}{p}} \neq 2\cdot 4^{\frac{2}{p}}$ para todo $p \neq 2$, tenemos que

$$2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) \neq \|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2, \quad \forall p \neq 2.$$

Finalmente, notemos que para $p = 2$ los espacios $\mathbb{R}_p^n$, ℓ^p y $C([a,b])^p$ se corresponden con los ejemplos 5.1.3-5.1.5, respectivamente, donde se cumple la ley del paralelogramo pues en este caso sí que son espacios euclídeos. ■

Problema 5.4 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

Solución: Como x e y son ortogonales $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.\end{aligned}$$

■

Problema 5.5 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable. Prueba que cualquier subespacio cerrado $M \subset \mathbb{H}$ es a su vez un espacio de Hilbert. Además, M tiene una base ortonormal.

Solución: Como $\mathbb{H}$ es completo y $M \subset \mathbb{H}$ es cerrado entonces por el teorema 3.5.14 M es completo. Pero como $\mathbb{H}$ es separable, entonces por el ejercicio 3.4.7 M es separable. Entonces, por el teorema 5.2.9, M tiene una base ortonormal. ■

Problema 5.6 A partir del teorema 5.2.15, prueba que todo sistema ortogonal $(\phi_n)_{n=1}^N$ en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable se puede completar hasta obtener una base ortogonal de $\mathbb{H}$.

Solución: Del teorema 5.2.9 se sigue que $\mathbb{H}$ tiene una base ortonormal, no obstante el objetivo de este problema no es probar que se puede construir dicha base (eso ya lo afirma el teorema) sino mostrar como, dado un conjunto finito de vectores ortonormales completarlos hasta obtener dicha base. Existen varias formas de probar este resultado. Una de ellas, efectivamente, es usar el teorema 5.2.15.

Sea M el espacio generado por el sistema ortogonal $(\phi_n)_{n=1}^N$. M es cerrado. Por el teorema 5.2.15, tenemos que todo vector $x \in \mathbb{H}$ se expresa de forma única como una suma de un vector $y \in M$ y un vector $y^\perp \in M^\perp$. Al ser $\mathbb{H}$ separable y $M^\perp$ un subconjunto suyo, tenemos que $S^\perp$ es separable (por el ejercicio 3.4.7) y cerrado (por el ejercicio 5.2.14), por tanto M es un espacio de Hilbert que admite una base ortogonal numerable (teorema 5.2.9) que denotaremos por $(\phi_k^\perp)_k$. Dado que todo $x \in \mathbb{H}$ se expresa de forma única como $x = y + y^\perp$, y se expresa de forma única en la base $(\phi_n)_{n=1}^N$ y $y^\perp$ en la base $(\phi_k^\perp)_k$, entonces está claro que x se puede escribir de forma única en la base $(\phi_n)_{n=1}^N \bigcup (\phi_k^\perp)_k$. En otras palabras, $(\phi_n)_n \bigcup (\phi_k^\perp)_k$ es una base de $M \oplus M^\perp = \mathbb{H}$, luego hemos completado la base $(\phi_n)_{n=1}^N$ hasta obtener una base del espacio entero $\mathbb{H}$. ■

Problema 5.7 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal completa de $\mathbb{H}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{H}$, se tiene la igualdad, también denominada igualdad de Parseval

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \overline{\langle y, \phi_n\rangle}.$$

Solución: Lo primero que asegurarse es que la serie converge. Para ello notamos que, usando la desigualdad de Hölder (3.7.2) con $p = 2$ (o la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.1.2) en $\mathbb{C}^N$)

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n\rangle \overline{\langle y, \phi_n\rangle}|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle y, \phi_n\rangle}|^2,$$

pero como los coeficientes de Fourier son una sucesión de ℓ^2 (ver la desigualdad de Bessel (5.2.4)), las sumas de la derecha están acotadas para todo N, luego tomando el límite $N \to \infty$ tenemos que la serie es absolutamente convergente, luego es convergente. Por otro lado, sea

$$x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \phi_n\rangle \phi_n \quad \text{y} \quad y_N = \sum_{n=1}^{N} \langle y, \phi_n\rangle \phi_n,$$

entonces como $(\phi_n)_n$ es una base ortonormal completa de $\mathbb{H}$,

$$x_N \to x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \phi_n \quad \text{y} \quad y_N \to y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, \phi_n\rangle \phi_n,$$

cuando $N \to \infty$ (ver teorema 5.2.5). Un cálculo directo, usando la ortonormalidad de los vectores de la base $(\phi_n)_n$ nos da

$$\langle x_N, y_N\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \phi_n\rangle \overline{\langle y, \phi_n\rangle},$$

de donde, tomando el límite $N \to \infty$, y usando la continuidad del producto escalar obtenemos el resultado. ■

Problema 5.8 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal completa de $\mathbb{H}$. Prueba, sin usar el teorema 5.2.5, que para todo $x \in \mathbb{H}$, la serie

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \phi_n$$

converge, y que el vector $x - y$ es ortogonal a cada ϕ_n, $n \geq 1$.

Solución: Si usamos el teorema 5.2.5 el problema es *trivial*, pues de 2. se sigue que la serie es convergente y que su suma es x, luego $x = y$, y por tanto $x - y = 0$ que es ortogonal a todos los ϕ_n. Demos una prueba directa sin usar el teorema.

Sea y_N la suma parcial $y_N = \sum_{n=1}^{N} \langle y, \phi_n \rangle \phi_n$. Usando la ortonormalidad de $(\phi_n)_n$ tenemos que

$$\|y_N\|^2 = \langle y_N, y_N \rangle = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n \rangle|^2.$$

Como los coeficientes de Fourier son una sucesión de ℓ^2 (desigualdad de Bessel (5.2.4)), la suma de la derecha están acotadas para todo N, luego la serie es absolutamente convergente y por tanto convergente (ver 4.2.11).

Por otro lado, para todo $n < N$,

$$\langle x - y_N, \phi_n \rangle = \langle x, \phi_n \rangle - \sum_{k=1}^{N} \langle x, \phi_k \rangle \langle \phi_k, \phi_n \rangle = \langle x, \phi_n \rangle - \langle x, \phi_n \rangle = 0.$$

Tomando el límite $N \to \infty$ y usando la continuidad del producto escalar obtenemos el resultado. ■

Problema 5.9 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$. Definiremos como $\operatorname{span}(M)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M. Prueba que para todo $M \neq \emptyset$, $V = \operatorname{span}(M)$ es denso en $\mathbb{H}$ si y solo si $M^\perp = \{0\}$.

Solución: Probemos que si $\overline{V} = \mathbb{H}$, entonces $M^\perp = \{0\}$. Sea $x \in M^\perp$ cualquiera y supongamos que $\overline{V} = \mathbb{H}$. Entonces $x \in \mathbb{H} = \overline{V}$, i.e., x es un punto de acumulación de V, luego existe $(x_n)_n \in V$ tal que $x_n \in x$. Como $x \in M^\perp$, entonces $x \perp M$ y por tanto $x \perp V$, luego para todo $x \in \mathbb{N}$, $\langle x_n, x \rangle = 0$. Pero por la continuidad del producto escalar, tenemos que si $n \to \infty$, $x_n \to x$ y $0 = \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle$, luego $x = 0$. Como x era cualquiera, entonces $M^\perp = \{0\}$.

Supongamos ahora que $M^\perp = \{0\}$. Sea $x \perp V$ cualquiera. Entonces $x \perp M$, luego $x \in M^\perp$, pero como $M^\perp = \{0\}$ entonces $x = 0$, luego $V^\perp = \{0\}$. Pero entonces $V = \mathbb{H}$. Dado que $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ es completo, luego es cerrado), entonces $\overline{V} = \mathbb{H}$. ■

Problema 5.10 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$. Prueba que M es cerrado si y solo si $M = (M^\perp)^\perp$.

Solución: Si $M = (M^\perp)^\perp$, entonces por el ejercicio 5.2.14 $M^\perp$ es cerrado. Si M es cerrado por el ejercicio 5.2.16, $M = (M^\perp)^\perp$. Luego M es cerrado si y sólo si $M = (M^\perp)^\perp$. ■

Problema 5.11 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$. En este caso sabemos (ver (5.2.7)) que para todo $x \in \mathbb{H}$ existen unos únicos $y \in M$ y $y^\perp \in M^\perp$ tales que $x = y + y^\perp$. Definamos el operador $P : \mathbb{H} \mapsto M$ mediante la fórmula $x \mapsto y = Px$. P se denomina operador de proyección (o proyector ortogonal) de $\mathbb{H}$ sobre M. Prueba que

1. P es lineal y acotado.
2. $P(M^\perp) = 0$.
3. $P^2 = P \cdot P = P$ (es idempotente).

Solución: 1. Sea $x_1, x_2 \in M$. Entonces como $x_1 = y_1 + y_1^\perp$ y $x_2 = y_2 + y_2^\perp$, tenemos $Px_1 = y_1$ y $Px_2 = y_2$. Entonces, como $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (y_1^\perp + y_2^\perp)$, y $\lambda x = \lambda y + \lambda y^\perp$, tenemos

$$P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = Px_1 + Px_2, \quad P(\lambda x) = \lambda y = \lambda Px,$$

luego P es lineal. Además, usando el teorema de Pitágoras (ver problema 5.4) tenemos, para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$\|x\|^2 = \|y + y^\perp\| = \|y\|^2 + \|y^\perp\|^2 \geq \|y\|^2 = \|Px\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|Px\| \leq \|x\|,$$

luego P es acotado.

2. Está claro que de la definición de P, $Px = x$ para todo $x \in M$, además $Px = 0$ para todo $x \in M^\perp$, luego $P(M^\perp) = 0$.

3. Finalmente, para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$P^2x = P(Px) = Py = y = Px \quad \Rightarrow \quad P^2 = P.$$

■

Capítulo 6

Operadores en espacios de Hilbert

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de los operadores lineales definidos en espacios de Hilbert separables sobre $\mathbb{C}$.

6.1. Definiciones

Definición 6.1.1 *Sea la aplicación (operador) lineal y acotada $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ espacios euclídeos. Si existe el operador lineal $A^* : \mathbb{E}' \mapsto \mathbb{E}$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$ e $y \in \mathbb{E}'$*

$$\langle Ax, y\rangle' = \langle x, A^*y\rangle, \qquad (x \in \mathbb{E},\ y \in \mathbb{E}') \tag{6.1.1}$$

lo denominaremos adjunto de A.

Por sencillez asumiremos $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

Por ejemplo sea el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \tag{6.1.2}$$

comúnmente denominado *operador desplazamiento* (shift). Entonces su adjunto S^* es el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots), \tag{6.1.3}$$

Ejercicio 6.1.2 *Sea el operador multiplicación* $M : C^2_{[a,b]} \mapsto C^2_{[a,b]}$ *definido por*

$$Mx(t) = f(t)x(t), \quad f(t) \in C([a,b]), \quad \forall x(t) \in C^2_{[a,b]}.$$

Prueba que M^* *existe y es el operador multiplicación por la función complejo conjugada* $\overline{f(t)}$*. Prueba que este operador es acotado y que* $\|M\| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$*. Nótese que si* $f(t)$ *es real entonces* $M^* = M$*.*

Para los espacios euclídeos la existencia del operador adjunto no está garantizada en general, no obstante sí que lo está en el caso de los espacios de Hilbert. De hecho, como consecuencia del Teorema de representación de Riesz 5.2.20 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.1.3 (Existencia del operador adjunto) *Sea la aplicación (operador) lineal y acotada* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$*,* $\mathbb{H}$*,* $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador* $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ *adjunto a* A*. Además,* A^* *es lineal y*

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{6.1.4}$$

Demostración: Definimos el funcional $T_y x : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$, $T_y x := \langle Ax, y\rangle'$. Obviamente, para cada y fijo

$$|T_y x| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\| \leq K\|x\|, \quad \forall y \in \mathbb{H}',$$

i.e., T_y es un funcional acotado, así que el teorema de Riesz 5.2.20 nos asegura que existe un único vector y^* tal que $T_y x = \langle x, y^*\rangle$, para todo $x \in \mathbb{H}$. Así, el operador $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ induce un operador $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ que a cada $y \in \mathbb{H}'$ le hace corresponder un único $y^* \in \mathbb{H}$, tal que $A^*y = y^*$, pues $\langle Ax, y\rangle' = \langle x, y^*\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. La linealidad de A^* se sigue de la linealidad de A. En efecto, para todos $x \in \mathbb{H}$ y $y, z \in \mathbb{H}'$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(\alpha y + \beta z)\rangle &= \langle Ax, \alpha y + \beta z\rangle' = \overline{\alpha}\langle Ax, y\rangle + \overline{\beta}\langle Ax, z\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, A^*y\rangle + \overline{\beta}\langle x, A^*z\rangle = \langle x, \alpha A^*y + \beta A^*z\rangle.\end{aligned}$$

Luego $A^*(\alpha y + \beta z) = \alpha A^*y + \beta A^*z$.

Probemos ahora que $\|A^*\| = \|A\|$. De la igualdad $\langle Ax, y\rangle' = \langle x, A^*y\rangle$ y usando que A es acotado tenemos

$$|\langle x, A^*y\rangle| = |\langle Ax, y\rangle'| \leq \|A\|\|x\|\|y\|.$$

Escogiendo $x = A^*y$ obtenemos, asumiendo[1] $\|A^*y\| \neq 0$,

$$\|A^*y\|^2 \leq \|A\|\|A^*y\|\|y\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|A^*y\|}{\|y\|} \leq \|A\| \quad \Rightarrow \quad \|A^*\| \leq \|A\|.$$

De lo anterior se sigue que A^* es acotado. Pero entonces podemos aplicar el mismo razonamiento intercambiando A y A^* lo que nos conduce a la desigualdad contraria $\|A\| \leq \|A^*\|$. En efecto

$$|\langle Ax, y\rangle'| = |\langle x, A^*y\rangle| \leq \|A^*\|\|x\|\|y\|, \quad y = Ax \quad \Rightarrow$$

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^*\|\|Ax\|\|x\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^*\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|A^*\|.$$

Por tanto $\|A\| = \|A^*\|$. ■

Veamos algunas propiedades de los operadores adjuntos.

Proposición 6.1.4 *Sean las aplicaciones lineales acotadas $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $B : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ espacios de Hilbert. Entonces se cumple que*

1. $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle'$, $x \in \mathbb{H}$ *e* $y \in \mathbb{H}'$,
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$,
4. $(A^*)^* = A$,
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$,
6. $A^*A = 0$ *si y solo si* $A = 0$,
7. *Si* $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$, *entonces* $(AB)^* = B^*A^*$.

Demostración: Para 1. usamos $\langle A^*y, x\rangle = \overline{\langle x, A^*y\rangle} = \overline{\langle Ax, y\rangle'} = \langle x, Ay\rangle'$. Para 2. tememos

$$\begin{aligned}\langle x, (A + B)^*y\rangle &= \langle (A + B)x, y\rangle' = \langle Ax, y\rangle' + \langle Bx, y\rangle' = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle \\ &= \langle x, (A^* + B^*)y\rangle' \quad \Rightarrow \quad (A + B)^* = A^* + B^*.\end{aligned}$$

[1] Nótese que si $\|A^*y\| = 0$, entonces obtendríamos $\|A\| \geq 0$, lo cual es evidente.

Para 3.

$$\langle x, (\alpha A)^* y\rangle = \langle (\alpha A)x, y\rangle' = \alpha\langle Ax, y\rangle' = \alpha\langle x, A^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} A^* y\rangle,$$

de donde se sigue 3. Veamos 4. Nótese que $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ luego $(A^*)^* : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$.

$$\langle (A^*)^* x, y\rangle' = \langle x, (A^*)y\rangle = \langle Ax, y\rangle' \quad \Rightarrow \quad (A^*)^* = A.$$

Antes de probar 5. nótese que $A^*A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ y $AA^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}'$. Nótese que como A y A^* son acotados su producto A^*A también lo es (ver problema 4.13) y $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$. Por otro lado, usando

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle' = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\|\|x\| \leq \|A^*A\|\|x\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^2 \leq \|A^*A\| \Rightarrow \left(\sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^2 \leq \|A^*A\| \Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^*A\|,$$

que juntado con lo anterior nos da $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Finalmente, intercambiando A y A^* tenemos $\|(A^*)^*A\| = \|A^*\|^2$. Usando 4 y que $\|A^*\| = \|A\|$ se sigue el resultado. La propiedad 6. es consecuencia de 5. y de las propiedades de la norma. Finalmente, para 7. tenemos

$$\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle \quad \Rightarrow \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

■

Definición 6.1.5 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$. Si $A = A^*$, se dice que el operador es hermítico o autoadjunto.*

Lo anterior implica que A es autoadjunto si y solo si para todos $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Definición 6.1.6 *Sea $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ biyectivo. Si $U^{-1} = U^*$, se dice que el operador es unitario.*

Nótese que lo anterior es equivalente a decir que $U^*U = UU^* = I$. Además de la definición de adjunto se sigue que

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle,$$

i.e., los operadores unitarios preservan el producto escalar.

Definición 6.1.7 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$. Si $AA^* = A^*A$, se dice que el operador es normal.*

Obviamente tanto los operadores autoadjuntos como los unitarios son normales, pero no al contrario. Tómese como ejemplo el operador $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T = 2iI$, donde I es el operador identidad (ver ejemplo 4.4.2). Está claro que $TT^* = T^*T = 4I$, luego es normal, pero no es autoadjunto pues $T^* = -T$ y claramente no es unitario.

Antes de continuar vamos a hacer una breve incursión por el álgebra lineal. En adelante asumiremos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$. Supongamos que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces como ya hemos visto, $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Definamos el operador $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal.

Sea $(e_k)_k$ una base de $\mathbb{H}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{H}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \quad \Rightarrow \quad y = Tx = \sum_{k=1}^{n} x_k T e_k.$$

Si

$$Te_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad \Rightarrow$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Es decir, si consideramos los vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$ con coordenadas x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente, entonces el operador T se puede representar usando una matriz $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, i.e., tenemos la aplicación $T : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, $y = Ax$, donde A es la matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

obtenida a partir de la transformaciones de los elementos de la base $(e_k)_k$ de $\mathbb{H}$.

Nota 6.1.8 *Nótese que la equivalencia de un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido sobre un espacio de dimensión finita, $\dim \mathbb{H} = n < +\infty$, discutida aquí es extensible a cualquier espacio normado (no necesariamente un espacio de Hilbert) de dimensión finita, pues la construcción que se ha hecho solo hace uso de las propiedades de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales.*

Si tenemos un espacio de Hilbert de dimensión finita hemos visto que es es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ (ver teorema 5.2.12). Tomemos en $\mathbb{C}^n$ la base canónica $e_k = \delta_{i,k}$, $k, i = 1, \ldots, n$. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, el producto escalar viene dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = x^T \overline{y},$$

donde por x^T entendemos el vector traspuesto de x. Luego

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T (A^T \overline{y}) = x^T \overline{(\overline{A}^T)\, y} = \langle x, T^* y \rangle.$$

Es decir, si al operador T le corresponde la matriz A a su adjunto T^* le corresponde la matriz $B = \overline{A}^T$.

Así, tenemos en dimensión finita que

1. Un operador T es autoadjunto si su correspondiente matriz A en hermítica, i.e., $A = \overline{A}^T$.

2. Un operador T es unitario si su correspondiente matriz U es unitaria, i.e., $A^{-1} = \overline{A}^T \iff A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I$.

3. Un operador T es normal si su correspondiente matriz UA satisface que $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$.

Ejercicio 6.1.9 *Prueba que la matriz del operador identidad es la matriz identidad. ¿Cuál es la matriz del operador $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$, $Ae_k = e_k$, $k = 3, \ldots, n$, donde $(e_k)_{k=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$?*

Nótese que lo anterior se puede generalizar al caso de dimensión infinita, sólo que en este caso la matriz sería una matriz infinita

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.1.10 *Usando la base de Schauder de ℓ^2 (ver ejemplo 4.2.15) encuentra las matrices del operador S y S^* definidos en (6.1.2) y (6.1.3), respectivamente.*

Ejercicio 6.1.11 *¿Cuál es la matriz del operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$ tal que $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$, $Ae_k = e_k$, $k = 3, \ldots, n$, $(e_k)_k$ en la base de Schauder definida en el ejemplo 4.2.15? ¿Es dicho operador acotado?*

6.2. Operadores autoadjuntos

Veamos algunas propiedades de los operadores autoadjuntos.

Lema 6.2.1 *Sea $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$, con $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo complejo. Entonces, si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$, A es el operador nulo $A = \Theta$.*

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{E}$ cualesquiera y sea $v = \alpha x + y$. Por hipótesis $\langle Av, v\rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned} 0 = \langle Av, v\rangle &= \langle A(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle = |\alpha|^2\langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle \\ &+ \alpha\langle Ax, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Ay, x\rangle = \alpha\langle Ax, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Ay, x\rangle. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 1$ tenemos $\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = 0$, y para $\alpha = i$, $\langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle = 0$. Sumando ambas obtenemos $\langle Ax, y\rangle = 0$ para todos $x, y \in \mathbb{E}$, luego el punto 4. del ejercicio 5.1.2 implica que $Ax = 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$, luego $A = \Theta$. ■

Teorema 6.2.2 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal y acotado en $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces*

1. *Si A es autoadjunto, entonces para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $\mathbb{H}$ es complejo y para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, entonces A es autoadjunto.*

Demostración: Para el primero tenemos

$$\overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R},$$

donde la primera igualdad es por la propiedad de simetría del producto escalar y la segunda por se A autoadjunto. Para la segunda usamos que para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, entonces, para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle (A - A^*)x, x\rangle = 0,$$

pero, por lema anterior, $A - A^* = 0$, luego $A = A^*$. ■

El teorema anterior caracteriza los operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert complejos.

Ejercicio 6.2.3 *Probar las siguientes afirmaciones:*

1. *Sean A y B operadores autoadjuntos de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $A + B$ y αA también son autoadjuntos.*
2. *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador y A^* su adjunto. Entonces $A + A^*$ y A^*A son autoadjuntos*

Proposición 6.2.4 *El producto AB de dos operadores autoadjuntos A y B es autoadjunto si y solo si A y B conmutan, i.e., $AB = BA$.*

Demostración: Del punto 7. de la proposición 6.1.4 se sigue que $(AB)^* = B^*A^* = BA$, luego $(AB)^* = (AB)$ si y solo si $AB = BA$. ■

Teorema 6.2.5 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados y autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.*

Demostración: Como T es el límite de la sucesión T_n, T es acotado (¿por qué?). La linealidad se sigue de la linealidad de T_n. Como T es lineal y acotado en un espacio de Hilbert, el teorema 6.1.3 nos asegura que existe su adjunto T^*. Probemos que es autoadjunto.

Comencemos notando que

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|.$$

La primera igualdad es consecuencia del punto 2 de la proposición 6.1.4 y la segunda de (6.1.4). En particular lo anterior nos indica que si $T_n \to T$, entonces $T_n^* \to T^*$. Usando la desigualdad triangular

$$\|T - T^*\| \leq \|T - T_n\| + \underbrace{\|T_n - T_n^*\|}_{=0} + \|T_n^* - T^*\| = 2\|T - T_n\| \to 0,$$

luego $\|T - T^*\| = 0$ de donde se sigue que $T = T^*$. ■

Teorema 6.2.6 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.*

Demostración: Sea $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\| \quad \Rightarrow \quad M \leq \|A\|.$$

Nótese que

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \quad \Rightarrow \quad |\langle Ax, x\rangle| \leq M\|x\|^2, \quad \forall x \neq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{H}$ tal que $\|x\| = 1$ y tomemos $y = Ax/\|Ax\|$ ($Ax \neq 0$). Claramente $\|Ax\| = |\langle Ax, y\rangle|$. Con esta elección tenemos que $\|Ax\| = \langle Ax, y\rangle = \Re(\langle Ax, y\rangle)$. Por otro lado tenemos la identidad

$$\Re(\langle Ax, y\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\Big), \quad \forall x, y \in \mathbb{H}. \quad (6.2.1)$$

Luego

$$\|Ax\| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \frac{1}{4}\big(|\langle A(x+y), x+y\rangle| + |\langle A(x-y), x-y\rangle|\big).$$

Ahora bien, de la desigualdad anterior, usando que $|\langle Ax, x\rangle| \leq M\|x\|^2$, $\forall x \neq 0$ y la igualdad del paralelogramo (5.1.3) se tiene (recuérdese que $\|x\| = \|y\| = 1$)

$$\|Ax\| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \frac{1}{4}\left(M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2\right) \leq \frac{M}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = M.$$

Luego $\|Ax\| \leq M\|x\|$ para todo x con $\|x\| = 1$, i.e., $\|A\| \leq M$, por tanto $\|A\| = M$. ■

Corolario 6.2.7 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Si $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = B$. En particular, si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces A es el operador nulo.*

Demostración: Si $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert complejo podemos usar el lema 6.2.1. Probémoslo usando en teorema 6.2.6 válido para cualquier espacio de Hilbert. Por definición

$$\|A - B\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (A-B)x, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |0| = 0,$$

luego $A = B$. Si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = 0$, luego $\|A\| = 0$, i.e., $A = \Theta$, donde Θ es el operador nulo del ejemplo 4.4.3. ■

Ejercicio 6.2.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto. Prueba que $\|A^2\| = \|A\|^2$.*

Usando la propiedad $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (ver punto 5. de la proposición 6.1.4) y que A es autoadjunto, $A = A^*$, y, por tanto $A^*A = A^2$ se sigue el resultado. ■

Para terminar este apartado veamos un ejemplo muy útil a la hora de encontrar ejemplos de distintos tipos de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Ejemplo 6.2.9 *Sea $(\mu_n)_n \in \mathbb{C}$ una sucesión (finita o infinita) acotada y sea $m = \sup_n |\mu_n|$. Entonces existe un único operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, tal que, para todo n,*

$$T\phi_n = \mu_n \phi_n. \tag{6.2.2}$$

Vamos a probarlo para el caso de dimensión infinita puesto que el de dimensión finita se puede considerar un caso particular de este cuando $\mu_n = 0$ para todos $n > N \in \mathbb{N}$.

Por el teorema 5.2.9 sabemos que existe una base ortonormal completa en $\mathbb{H}$, y por el 5.2.5, que todo $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación en serie de Fourier tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, \quad c_k = \langle x, \phi_k \rangle, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty. \tag{6.2.3}$$

Para cada $x \in \mathbb{H}$ definamos la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k.$$

Dicha serie converge para cada $x \in \mathbb{H}$. La idea es similar a la usada en la última parte de la prueba del teorema 5.2.5. Sean S_n las sumas parciales de S

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k \phi_k,$$

y sea $j > n$. Entonces,

$$\|S_n - S_j\|^2 = \sum_{k=n+1}^{j} |\mu_n|^2 |c_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=n+1}^{j} |c_k|^2,$$

que se puede hacer tan pequeño como se quiera si elegimos $j > n > N \in \mathbb{N}$, con N suficientemente grande. Luego S_n es de Cauchy y como $\mathbb{H}$ es completo, $S_N \to S$. Por tanto podemos definir el operador

$$T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbb{H}, \quad Tx = S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k. \tag{6.2.4}$$

Además, podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión de operadores $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T_n x = S_n$. Está claro que T_n es lineal. Probemos que T_n es acotado para cada n. En efecto,

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |\mu_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = m^2 \|x\|^2. \tag{6.2.5}$$

Además, para cada $x \in \mathbb{H}$, $T_n x \to Tx$. Probemos que el operador T, es lineal y es acotado. La linealidad de T se sigue de la continuidad de la norma y la linealidad de los T_n. La acotación de T se sigue[2] de tomar el límite cuando $n \to \infty$ en (6.2.5)

$$\|Tx\|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2| \leq m^2 \|x\|^2.$$

De lo anterior se sigue además que $\|T\| \leq m$. Ahora bien

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\phi_n\| = \|\mu_n \phi_n\| = |\mu_n| \quad \Rightarrow \quad \forall n \quad \|T\| \geq |\mu_n|.$$

Tomando supremos en n se deduce que $\|T\| \geq m$, luego $\|T\| = m = \sup_n |\mu_n|$.

Nótese que como caso particular de (6.2.4) se tiene (6.2.2) y además

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k. \tag{6.2.6}$$

Además, como T es acotado, existe T^*. Usando que, para todo $x \in \mathbb{H}$, tenemos, por un lado, que

$$T^* x = y^* = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \phi_k \quad \Rightarrow \quad \langle T^* x, \phi_n \rangle = \nu_n,$$

y, por el otro,

$$\langle T^* x, \phi_n \rangle = \langle x, T\phi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, \mu_n \phi_n \right\rangle = \overline{\mu_n} c_n \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \overline{\mu_n} \phi_n,$$

de donde se sigue que

$$T^* x = T^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k} c_k \phi_k, \tag{6.2.7}$$

y que, para todo n, $T^* \phi_n = \overline{\mu_n} \phi_n$. Además, del teorema 6.1.3, T^* es acotado y $\|T^*\| = \|T\|$.

[2]También se puede usar el Teorema de Banach-Steinhaus pues la sucesión $\|T_n x\|$ es acotada para cada x, luego existe un c tal que para todo n, $\|T_n\| \leq c$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que $\|T\| \leq c$, pues, por el ejercicio 4.4.19, $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ es un espacio de Banach.

Finalmente, como $T^*T\phi_n = |\mu_n|^2\phi_n = TT^*\phi_n$, entonces, por el problema[3] 6.2 se sigue que $T^*T = TT^*$, luego nuestro operador T es normal.

Obviamente si la sucesión $(\mu_n)_n$ es real, entonces T es autoadjunto. ■

6.3. Inverso de un operador

Veamos a continuación el problema de invertir un operador lineal A en un espacio normado en general y en un espacio euclídeo en particular. En el caso de dimensión finita este problema es relativamente sencillo. De hecho que exista el inverso A^{-1} de A es equivalente a que A sea inyectivo, sobreyectivo, que exista un B tal que $AB = I$, o que $BA = I$, donde I denota al operador identidad (ver ejemplo 4.4.2). Además, como ya vimos en el punto 4 del teorema 4.4.9, en el caso de dimensión finita existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$. Además, si nos restringimos a espacios normados de dimensión finita, A es acotado y si es invertible su inversa también es acotada.

En dimensión infinita la situación es mucho más complicada. Los siguientes ejemplos muestran una variedad de casos.

Ejemplo 1. El operador *operador desplazamiento* S definido por (6.1.2) es acotado e inyectivo (la ecuación $Sx = y$ tiene una única solución, o bien no tiene), luego tiene inversa según la definición 3.3.7, sin embargo no es sobreyectivo (la ecuación $Sx = y$ no tiene solución, e.g. elegir $y = (y_1, y_2, \dots)$, $y_1 \neq 0$). Por otro lado, el operador S^* definido en (6.1.2) es sobreyectivo pero no inyectivo (luego no tiene inverso según la definición 3.3.7). Además, es fácil comprobar que $S^*S = I$ mientras que $SS^* \neq I$.

Ejemplo 2. Sea el operador multiplicación por t del ejemplo 4.4.6, $M : L^2([0,1]) \mapsto L^2([0,1])$ (que es un caso particular del operador M del ejemplo 6.1.2). Este operador es acotado y además inyectivo. En efecto, $Mx(t) = 0$ si y solo si $x(t) = 0$ en casi todo punto, sin embargo no es sobreyectivo pues, por ejemplo, $Mx(t) = 1$ implica que $x(t) = 1/t$ que no es de $L^2([0,1])$.

[3] Se puede comprobar directamente, usando (6.2.6) y (6.2.7), que para todo $x \in \mathbb{H}$, $T^*Tx = TT^*x$, con x definido mediante la serie (6.2.3).

Ejemplo 3. Sea el operador de Volterra $V : C_\infty([0,1]) \mapsto C([0,1])$,

$$Vx := (Vx)(t) = \int_0^t x(\tau)\tau, \quad t \in (0,1). \tag{6.3.1}$$

Este operador es acotado y tiene inverso (ver teorema 4.4.9) pues $Vx = 0$ implica $x(t) = 0$. Además está claro que la ecuación $(Vx)(t) = y(t)$ siempre tiene solución $x(t) = y'(t)$, luego el inverso de V es el operador derivada D que sabemos que no es acotado. Nótese que $\mathcal{I}(V) \neq C([0,1])$ pues si $y \in C([0,1])$ tal que $y(0) \neq 0$ entonces $y \notin \mathcal{I}(V)$.

Ejemplo 4. Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots). \tag{6.3.2}$$

Está claro que es acotado pues

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

Por otro lado, Se puede comprobar directamente que el operador B sobre las sucesiones de ℓ^2 definido por

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots),$$

es tal que $ABx = BAx = x$ para todo $x \in \ell^2$. Luego $B = A^{-1}$, pero está claro que B no es acotado (basta tomar como sucesión $(x_n)_n$, la base de Schauder definida en el ejemplo 4.2.15). Por otro lado, está claro también que $I(A) \neq \ell^2$, pues si elegimos $y = (1/n^{3/2})_n \in \ell^2$, entonces $Ax = y$ para $x = (1/n^{1/2})_n$ que no es de ℓ^2. Así A es acotado e invertible pero su inverso no es acotado.

Los ejemplos anteriores nos llevan a la siguiente pregunta: ¿Qué definición de inverso de un operador adoptar?

Una opción es usar la propia definición 3.3.7 que ya vimos en el contexto de los espacios métricos, pero es poco práctica. Es mucho más común una definición inspirada en la propiedad discutida en la nota 3.3.9. Así, podríamos utilizar la siguiente definición:

Definición: Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Diremos que A es invertible si existe un operador B, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Nótese que según esta definición el operador desplazamiento S, que es invertible según la definición 3.3.7 cumple con $S^*S = I$ pero $SS^* \neq I$, por tanto no tendría inversa. Por otro lado, el operador del ejemplo 4 cumple con la definición anterior, pero como ya vimos su inverso es un operador no acotado.

Sin embargo hay un resultado muy importante cuya prueba por el momento omitiremos[4] conocido como el *Teorema de Banach de las aplicaciones inversas acotadas* que establece lo siguiente:

Teorema: *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, tal que el núcleo de A, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, y la imagen de A, $\mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.*

Dado que estamos interesados en los operadores lineales y acotados, lo anterior nos conduce a redefinir la inversa de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de la siguiente forma:

Definición 6.3.1 *Sea el operador $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Diremos que A es invertible si existe un operador $B \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.*

Nótese que según esta definición el operador (6.3.2) del ejemplo 4 no es invertible.

En adelante entenderemos que un operador acotado es invertible si existe su inversa y esta es acotada. Veamos a continuación varias propiedades de los operadores invertibles.

Teorema 6.3.2 (Existencia del operador inverso) *Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible y (en norma)*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad \textit{donde } A^0 := I \ \ \textit{y} \ \ \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Demostración: Sea la sucesión de operadores $(A_n)_n$, definida por $A_n x := X_n = (I + A + A^2 + \cdots + A^n)x$, $x \in \mathbb{X}$ (cualquiera). Obviamente A_n es

[4]Es una consecuencia del Teorema de Banach de la aplicación abierta, que a su vez se sigue del Teorema de Baire 3.6.1 que ya vimos al final del capítulo 3.

un operador acotado (probarlo como ejercicio). Probemos que $(X_n)_n$ es de Cauchy (en la norma de $\mathbb{X}$):

$$\begin{aligned}\|X_{n+p} - X_n\| &= \|A^{n+1}x + \cdots + A^{n+p}x\| \leq \|A^{n+1}x\| + \|A^{n+2}x\| + \cdots + \|A^{n+p}x\| \\ &\leq \|x\|(\|A^{n+1}\| + \cdots + \|A^{n+p}\|) \leq \|x\|(\|A\|^{n+1} + \cdots + \|A\|^{n+p}) \\ &\leq \|x\|(\|A\|^{n+1} + \cdots + \|A\|^{n+p} + \cdots) \leq \|x\|\frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{X}$ es completo (es de Banach) entonces, para cada $x \in \mathbb{X}$ la sucesión $A_n x$ converge a un $y \in \mathbb{X}$ que denotaremos por $y = Tx$. Así, tendremos el operador $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ bien definido. Como A es lineal, A_n lo será y por tanto T también. Para ello basta tomar el límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad $A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in \mathbb{X}$.

Probemos ahora que T es acotado. Si tomamos ahora el límite $p \to \infty$ en la desigualdad de antes y usamos que $X_{n+p} = A_{n+p}x \to Tx$, obtenemos

$$\|Tx - A_n x\| \leq \|x\|\frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|}, \tag{6.3.3}$$

de donde se sigue que $T - A_n$ es un operador lineal acotado, luego T lo será (¿por qué?). De la desigualdad anterior 6.3.3 se sigue además que

$$\frac{\|Tx - A_n x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \Rightarrow \|T - A_n\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = T.$$

Probemos ahora que $T = (I - A)^{-1}$. Ante todo notemos que $I - A$ es un operador lineal y acotado (por tanto continuo, ver Teorema 4.4.17). Calculemos el producto

$$\begin{aligned}(I - A)Tx &= (I - A)\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty}(I - A)A_n x = \lim_{n\to\infty}(A_n x - A \cdot A_n x) \\ &= \lim_{n\to\infty}(x - A^{n+1}x).\end{aligned}$$

Pero $\|A^{n+1}x\| \leq \|A\|^{n+1}\|x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego $A^{n+1}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y por tanto $(I - A)Tx = x$ para todo x. La prueba de que $T(I - A)x = x$ para todo x es análoga y la omitiremos. Finalmente, para la cota de $\|(I - A)^{-1}\|$ usamos que $A_n \to (I - A)^{-1}$ y la desigualdad

$$\begin{aligned}\|A_n\| &= \|I + A + \cdots + A^n\| \leq 1 + \|A\| + \|A^2\| + \cdots + \|A^n\| \\ &\leq 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \cdots + \|A\|^n \leq \frac{1}{1 - \|A\|},\end{aligned}$$

de donde, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se tiene el resultado. ■

El teorema anterior admite una generalización que nos será de gran utilidad.

Teorema 6.3.3 *Sea el operador lineal y acotado $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < |\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces el operador $(\lambda I - A)$ es invertible y*

$$A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \quad \textit{y se cumple que} \quad \|A_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Demostración: Asumimos que $\lambda \neq 0$. Entonces, como $\|A\| < |\lambda|$, el operador $\widetilde{A} = A/\lambda$ es tal que $\|\widetilde{A}\| < 1$, y por el teorema 6.3.2, $1 - \widetilde{A}$ es invertible. Además, claramente el operador λI es invertible y por tanto se tiene

$$A_\lambda^{-1} = \left[\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \left[(\lambda I)\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}(\lambda I)^{-1}.$$

Luego,

$$A_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \widetilde{A}\right)^{-1}.$$

Como $\|A\| < |\lambda|$, entonces $\|\widetilde{A}\| < 1$. Aplicando el teorema 6.3.2 a $\widetilde{A}$ obtenemos la expresión para A_λ

$$(I - \widetilde{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{A}^k}{\lambda^k}.$$

Para probar la desigualdad restante usamos que

$$\|A_\lambda\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \|A\|/|\lambda|},$$

de donde se sigue el resultado. ■

Ejercicio 6.3.4 *Modifica la demostración del teorema 6.3.2 para probar directamente el teorema anterior.*

Definición 6.3.5 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}$, siendo $\mathbb{X}$ un espacio normado. El conjunto de de todos los operadores lineales A lo denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ y al conjunto de todos los operadores lineales y acotados A lo denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.*

Un corolario trivial del resultado probado en el ejercicio 4.4.19 es el siguiente teorema:

Teorema 6.3.6 *El espacio $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, es un espacio de Banach respecto a la norma de los operadores.*

Ejercicio 6.3.7 *Adapta la prueba del Teorema 6.3.2 para probar que toda sucesión de Cauchy de operadores $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, es convergente, i.e., se tiene el teorema anterior 6.3.6.*

En efecto, si T_n es de Cauchy entonces $\forall \epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$ y $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|T_{n+p} - T_n\| < \epsilon$. Luego la sucesión $X_n := T_n x$ es de Cauchy

$$\|T_{n+p}x - T_n x\| \leq \|T_{n+p} - T_n\|\|x\| \leq \epsilon\|x\| \Rightarrow \|T_{n+p}x - T_n x\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\mathbb{X}$ es completo $T_n x$ tendrá un límite y para cada x, i.e., podemos definir el operador $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ por $Tx = y$. De la misma forma que en la prueba del Teorema 6.3.2 se sigue que T es lineal. Para probar que es acotado usamos la desigualdad anterior:

$$\|T_{n+p}x - T_n x\| \leq \|T_{n+p} - T_n\|\|x\| \Rightarrow \frac{\|T_{n+p}x - T_n x\|}{\|x\|} \leq \epsilon \Rightarrow \frac{\|Tx - T_n x\|}{\|x\|} \leq \epsilon,$$

donde hemos tomando el límite $p \to \infty$ y usado la continuidad de la norma. I.e., $T - T_n$ es acotado y por tanto T lo es (T_n es acotado). Además, de lo anterior se sigue también, tomando el supremo en x, que $\|T - T_n\| \leq \epsilon$ para todo $n > N$, i.e., $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. ■

Una aplicación directa del Teorema 6.3.2 es el siguiente resultado:

Teorema 6.3.8 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. El conjunto $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{X})$ de los operadores invertibles en $\mathbb{X}$ es abierto en $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ un operador invertible. Definamos la bola $B(A, 1/\|A^{-1}\|)$. Cualquiera sea $B \in B(A, 1/\|A^{-1}\|)$ tendremos que

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad \Rightarrow \quad \|(B - A)A^{-1}\| \leq \|B - A\|\|A^{-1}\| < 1,$$

luego el operador $I + (B - A)A^{-1} = BA^{-1}$ es invertible, por tanto el operador $B = (BA^{-1})A$ lo será[5], i.e., todo operador $B \in B(A, 1/\|A^{-1}\|)$ es invertible, por tanto para cualquiera sea $A \in E$ existe una bola $B(A, 1/\|A^{-1}\|)$ $\subset E$ centrada en A, luego E es abierto. ■

6.4. Operadores compactos

Definición 6.4.1 *Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_n$ de $\mathbb{X}$, la sucesión $(Ax_n)_n$ de $\mathbb{Y}$ tiene una subsucesión convergente.*

Nótese que si A es compacto, A es acotado pues en caso contrario existiría una sucesión acotada $(x_n)_n$ tal que $\|Ax_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y entonces la sucesión $(Ax_n)_n$ no tendría una subsucesión convergente. Así pues, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.4.2 *Todo operador compacto es acotado.*

El recíproco no es cierto.

Ejercicio 6.4.3 *Prueba que el operador identidad $I : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert de dimensión infinita no es compacto.*

Escojamos una sucesión ortonormal $(x_n)_n$ en $\mathbb{H}$. Como $\|x_n - x_m\|^2 = 2$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $Ix_n = x_n$ no contiene subsucesiones de Cauchy y por tanto no tiene subsucesiones convergentes. ■

Teorema 6.4.4 *Sea A un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados de dimensión finita. Entonces A es compacto.*

[5]En efecto, si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como se puede comprobar directamente de la definición 6.3.1.

Demostración: En efecto, como $\mathbb{X}$ es de dimensión finita, entonces A es acotado (ver teorema 4.4.16), luego dada cualquier sucesión acotada $(x_n)_n$, la sucesión $(Ax_n)_n$ es acotada. Sea el conjunto $C_A = \{Ax_n : n \in \mathbb{N}\}$. C_A es acotado, luego su clausura $\overline{C_A}$ es un subconjunto de $\mathbb{Y}$ que es cerrado y acotado, luego por el teorema 4.3.8, es compacto. Luego, toda sucesión $(y_n)_n \in \overline{C_A}$, tiene una subsucesión convergente $(y_{n_k})_k$, $y_{n_k} \to y \in \overline{C_A}$, o sea, $y \in \mathbb{X}$. Por tanto, existe una subsucesión convergente de $(Ax_{n_k})_k$, luego A es compacto. ■

Ejemplo 6.4.5 *Se puede probar directamente, sin usar el teorema anterior, que cualquier operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, con $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert de dimensión finita es compacto.*

En efecto, del Teorema 4.4.16 sabemos que el operador A es acotado, y del Teorema del isomorfismo 5.2.12 que $\mathbb{H}$ es equivalente (isomorfo) a $\mathbb{C}^N$, con N la dimensión de $\mathbb{H}$. Entonces, dada cualquier sucesión acotada $(x_n)_n$, la sucesión (Ax_n) es acotada y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (en $\mathbb{C}^N$) dicha sucesión contiene al menos una subsucesión convergente, luego A es compacto. ■

Teorema 6.4.6 *El conjunto de todos los operadores compactos $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, es un espacio vectorial.*

Demostración: Sea $(x_n)_n \in \mathbb{H}$ una sucesión acotada. Sean A y B, dos operadores compactos. Como A es compacto, existe una subsucesión $(y_k)_k$ de $(x_n)_n$ ($y_k = x_{n_k}$) tal que Ay_k es convergente. Luego, también lo es la sucesión $(\lambda A)y_k$, y por tanto el operador λA es compacto. Por otro lado, como B es compacto, entonces existe una subsucesión $(z_j)_j$ de $(y_k)_k$ (y por tanto de $(x_n)_n$) tal que $(Bz_j)_j$ es convergente. Pero entonces $(Az_j)_j$ es convergente (¿por qué?). Luego, dada cualquier sucesión acotada $(x_n)_n$, existe una subsucesión $(z_j)_j$ de $(x_n)_n$ tal que $([A+B]z_j)_j$ es convergente. Luego $A+B$ es compacto. ■

Proposición 6.4.7 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sean y y z dos elementos dados de $\mathbb{H}$. Sea el operador lineal $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido por $Tx = \langle x, y\rangle z$. Entonces T es compacto.*

Demostración: Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de $\mathbb{H}$, i.e., $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cierto $M > 0$. Sea la sucesión compleja $a_n = \langle x_n, y\rangle$. Probemos que es acotada

$$|a_n| = |\langle x_n, y\rangle| \leq \|x_n\|\|y\| \leq M\|y\|.$$

Entonces, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass a_n tiene una subsucesión convergente $a_{k_n} = \langle x_{k_n}, y\rangle$. Sea a su límite. Entonces, utilizando la continuidad del producto escalar,

$$Tx_{k_n} = \langle x_{k_n}, y\rangle z \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} az,$$

es decir, la sucesión Tx_n contiene una subsucesión convergente. Luego T es compacto. ■

Nótese que si el operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, es acotado, i.e., $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, y su imagen $\mathcal{I}(A)$ es de dimensión finita, entonces, si $(x_n)_n$ es acotada, $(Ax_n)_n$ lo será y razonando como en la prueba del teorema 6.4.4, se deduce que A es compacto (independientemente de la dimensión de $\mathbb{H}$). Veamos que la hipótesis de que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ no es necesaria.

Ejercicio 6.4.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado de* rango finito *en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, i.e., la imagen de A, $\mathcal{I}(A)$, es de dimensión finita ($\dim \mathcal{I}(A) = n < +\infty$). Prueba, usando la proposición anterior, que A es compacto.*

Nótese que como A es compacto, entonces si $(x_n)_n$ es acotada, $(Ax_n)_n$ lo será, por tanto siguiendo el razonamiento de la segunda parte de la demostración del teorema 6.4.4 se sigue el resultado.

Vamos a probarlo directamente usando la proposición 6.4.7. Sea e_1, $\ldots$, e_n una base ortogonal de $\mathcal{I}(A) \subset \mathbb{X}$. Sea $y \in \mathcal{I}(A)$, cualquiera. Entonces, para cada y existe al menos un x tal que $y = Ax$, y además $y = \sum_{k=1}^{n} \langle Ax, e_k\rangle e_k$. Denotemos por A_k al operador $A_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $A_k = \langle Ax, e_k\rangle e_k$, para cada $k = 1, \ldots, n$. Entonces $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$. Como A es acotado existe su adjunto A^* (teorema 6.1.3), luego $A_k x = \langle Ax, e_k\rangle e_k = \langle x, A^* e_k\rangle e_k$. Entonces, por la proposición 6.4.7 deducimos que los A_k, $k = 1, \ldots, n$ son compactos y como $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$, del teorema 6.4.6 se deduce que A es compacto. ■

Teorema 6.4.9 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.*

Demostración: Sea $(x_n)_n \in \mathbb{H}$ una sucesión acotada cualquiera y sea $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. Asumiremos que $S > 0$, pues en caso contrario $(x_n)_n$ sería la sucesión nula $(0)_n$. Como, para todo n, T_n es compacto, entonces existe una subsucesión $(\tilde{x}_k)_k$ de $(x_j)_j$, tal que $\lim_{k\to\infty} T_n\tilde{x}_k \to y_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, i.e., la sucesión $(T_n\tilde{x}_k)_k$ es convergente para cada $n \in \mathbb{N}$. La forma de construirla es parecida a la que se usó en la prueba del técnico 4.3.1, se conoce como la construcción diagonal[6], y es como sigue:

Sea $n = 1$. Como T_1 es compacto entonces existe una subsucesión $(x_{1,j})_j$ tal que $(T_1x_{1,j})_j$ es convergente. Como T_2 es compacto entonces existe una subsucesión $(x_{2,j})_j$ de $(x_{1,j})_j$ tal que $(T_2x_{2,j})_j$ es convergente, y así sucesivamente. De esta forma obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(x_{n,j})_j$ de $(x_j)_j$ tal que $\lim_{j\to\infty} T_nx_{n,j} \to u_n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y además, por construcción, $(x_{n,j})_j$ es una subsucesión de las anteriores $(x_{k,j})_j$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. El siguiente diagrama muestra la construcción anterior:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(x_j)_j & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & \cdots & x_j \ \cdots & \\
(x_{1,j})_j \subset (x_j)_j & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,j} \ \cdots & \Rightarrow T_1x_{1,j} \overset{j}{\to} y_1 \\
(x_{2,j})_j \subset (x_{1,j})_j & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,m} & \cdots & x_{2,j} \ \cdots & \Rightarrow T_2x_{2,j} \overset{j}{\to} y_2 \\
(x_{3,j})_j \subset (x_{2,j})_j & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,m} & \cdots & x_{3,j} \ \cdots & \Rightarrow T_3x_{3,j} \overset{j}{\to} y_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
(x_{m,j})_j \subset (x_{m-1,j})_j & x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \cdots & x_{m,m} & \cdots & x_{m,j} \ \cdots & \Rightarrow T_mx_{m,j} \overset{j}{\to} y_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots
\end{array}
$$

Sea ahora la sucesión de las "diagonales" $(x_{m,m})_m$. Para cada n fijo la sucesión $(x_{m,m})_{m=n}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_{m,j})_j$, luego

$$\lim_{j\to\infty} T_mx_{j,j} = y_m, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Eso implica que la sucesión $(T_mx_{j,j})_j$ es de Cauchy. Probemos ahora que la sucesión $(Tx_{j,j})_j$ es de Cauchy.

Como $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$, eso significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $M > N_1$,

$$\|T - T_M\| < \frac{\epsilon}{3S}.$$

[6]Este tipo de razonamiento fue utilizado por primera vez por Cantor para probar que el conjunto de los reales no es numerable.

Pero como ya vimos, la sucesión $(T_m x_{j,j})_j$ es de Cauchy para todo $m \in \mathbb{N}$, luego lo será para $m = M$. Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_2 > M \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m > n > N_2$

$$\|T_M x_{n,n} - T_M x_{m,m}\| \leq \epsilon.$$

Pero entonces, si elegimos $m > n > N_2 > M$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|Tx_{n,n} - Tx_{m,m}\| &\leq \|Tx_{n,n} - T_M x_{n,n}\| + \|T_M x_{n,n} - T_M x_{m,m}\| \\ &\qquad + \|T_M x_{m,m} - Tx_{m,m}\| \\ &\leq \|T - T_M\|\|x_{n,n}\| + \frac{\epsilon}{3} + \|T_M - T\|\|x_{m,m}\| < \epsilon,\end{aligned}$$

i.e., $(Tx_{j,j})_j$ es de Cauchy y como $\mathbb{H}$ es completo, entonces $(Tx_{j,j})_j$ es convergente, luego T es compacto. ■

El teorema anterior 6.4.9 se puede parafrasear diciendo que el subespacio de los operadores compactos es cerrado[7] en $\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Teorema 6.4.10 *Sea $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador compacto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces su adjunto T^* es compacto.*

Demostración: Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada cualquiera no nula, y sea $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. Definamos la sucesión $(y_n)_n \in \mathbb{H}$, $y_n = T^* x_n$. Como T es compacto, T es acotado, y por tanto T^* es acotado, así que la sucesión $(y_n)_n$ es acotada. Como T es compacto, entonces existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ tal que $(Ty_{n_k})_k \in \mathbb{H}$ es convergente, y por tanto de Cauchy (pues $\mathbb{H}$ es completo). Pero entonces tomando n_k, n_m suficientemente grandes la cantidad $\|Ty_{n_k} - Ty_{n_m}\|$ la podemos hacer tan pequeña como se quiera (por ejemplo menor que $\epsilon/(2S)$). Entonces,

$$\begin{aligned}\|y_{n_k} - y_{n_m}\|^2 &= \|T^* x_{n_k} - T^* x_{n_m}\|^2 = \langle T^*(x_{n_k} - x_{n_m}), T^*(x_{n_k} - x_{n_m})\rangle \\ &= \langle TT^*(x_{n_k} - x_{n_m}), (x_{n_k} - x_{n_m})\rangle \\ &\leq \|TT^*(x_{n_k} - x_{n_m})\|\|x_{n_k} - x_{n_m}\| \\ &\leq 2S\|Ty_{n_k} - Ty_{n_m})\| < 2s\frac{\epsilon}{2S} = \epsilon.\end{aligned}$$

Luego, $(y_{n_k})_k$ es de Cauchy, y como $\mathbb{H}$ es completo, es convergente, i.e., $(T^* x_{n_k})_k$ es convergente, y por tanto T^* es compacto. ■

[7] Recuérdese que el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ es completo.

6.5. Teorema Espectral

En este apartado describiremos la teoría espectral de operadores autoadjuntos y compactos en espacios de Hilbert. Dicha teoría es la extensión del conocido problema de autovalores para matrices $n \times n$ al caso infinito. Comenzaremos, por tanto, con la definición de autovalores y autovectores[8]

Definición 6.5.1 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador en un espacio normado $\mathbb{X}$. Los números complejos λ tales que*

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{X},\ x \neq 0, \tag{6.5.1}$$

se denominan autovalores de A y los correspondientes x, autovectores de A asociados al autovalor λ.

En un espacio de dimensión finita podemos definir el *espectro* de un operador como el conjunto de los autovalores de su correspondiente matriz (en alguna base[9]). Puesto que para cualquier matriz $n \times n$ existen n autovalores (pudiendo estar repetidos como ocurre, por ejemplo, con la matriz identidad), en el caso finito es relativamente simple de estudiar (ver ejercicio 6.5.3). No ocurre lo mismo en el caso infinito.

Por ejemplo, el operador desplazamiento ya visto antes $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, no tiene autovalores pues la igualdad $Sx = \lambda x$ implica $x = 0$.

Así pues se precisa de una definición más general

Definición 6.5.2 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y A una aplicación lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El espectro de A, que denotaremos por $\sigma(A)$, es el conjunto de números complejos tales que el operador $(\lambda I - A)$ es no invertible, i.e., no existe $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$.*

El operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ se denomina resolvente de A. El conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador A_λ está bien definido se denomina conjunto resolvente de A y se suele denotar por $\rho(A)$. Obviamente el espectro de A, $\sigma(A)$, es el complementario del conjunto resolvente, $\rho(A)$, i.e., $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

La cantidad $r(A) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}$ se denomina radio espectral de A.

[8] También denominados valores propios y vectores propios, respectivamente.

[9] Es un hecho conocido del álgebra lineal que los autovalores de un operador no dependen de la base escogida.

Ejercicio 6.5.3 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que en dimensión finita, $\dim \mathbb{X} < +\infty$, $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los autovalores de A.*

Ante todo notemos que si $\dim \mathbb{X} = n < +\infty$, entonces como vimos en la nota 6.1.8, cada operador $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ se puede representar mediante una matriz $n \times n$. Luego, la ecuación (6.5.1) se trasforma en en el sistema lineal

$$Ax = \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0,$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Para que este sistema tenga solución no trivial $\det(A - \lambda I) = 0$, lo cual implica que el operador $A - \lambda I$ no puede ser invertible, luego $\lambda \in \sigma(A)$. Nótese además que $\det(A - \lambda I)$, es un polinomio de grado n en λ, luego la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene al menos una solución y como mucho n soluciones distintas. Conviene recordar que si usamos dos bases distintas para representar la matriz del operador A, lo que obtenemos son dos matrices semejantes y es un resultado conocido del álgebra lineal que las matrices semejantes tienen los mismos autovalores, i.e., los autovalores de un operador en dimensión finita son independientes de la base usada para representar la matriz de dicho operador. ■

De la definición 6.5.2 se sigue que todo autovalor de A pertenece al espectro de A, pero no a la inversa. De hecho existen operadores cuyo espectro no contiene autovalores.

Ejemplo 6.5.4 *Sea el espacio de las funciones continuas $C^\infty([a,b])$ (i.e., en $C([a,b])$ tomamos la norma uniforme). Sea $u \in C([a,b])$ y sea el operador multiplicación (ver ejemplo 6.1.2) $M : C([a,b]) \mapsto C([a,b])$, $Mx(t) = f(t)x(t)$, que esta bien definido para todo $x \in C([a,b])$. Este operador no tiene autovalores.*

Obviamente $(M - \lambda I)x(t) = (f(t) - \lambda)x(t)$, luego

$$(M - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{f(t) - \lambda}x(t).$$

El espectro de M es el conjunto de todos los λ tales que $f(t) = \lambda$ para algún $t \in [a,b]$, o sea, $\sigma(M)$ es la imagen de la función $f(t)$, i.e., el rango $\mathcal{I}(u)$. Si la función $f(t) = c$ es constante, entonces $\lambda = c$ es un autovalor de M (pues $Mx(t) = cx(t)$) que obviamente está en $\sigma(U)$, pero si, por ejemplo, $f(t)$ es una función estrictamente monótona en $[a,b]$, entonces $\sigma(M) = [f(a), f(b)]$, pero la ecuación $Mx(t) = f(t)x(t)$ no tiene ninguna solución no nula, i.e., M no tiene ningún autovalor. ■

Ejercicio 6.5.5 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que $r(A) \leq \|A\|$.*

Supongamos que existe un $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| > \|A\|$. Entonces por el Teorema 6.3.3 el operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ está bien definido lo cual es una contradicción. Luego si $\lambda \in \sigma(A)$, $|\lambda| \leq \|A\|$ y, por tanto, $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \|A\|$, de donde se sigue el resultado. ■

Del resultado anterior se sigue que $\sigma(A)$ está contenido en el disco cerrado $D = \{z;\ |z| \leq \|A\|\}$. De hecho se tiene el siguiente:

Teorema 6.5.6 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Entonces $\sigma(A)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ (cerrado y acotado de $\mathbb{C}$) contenido en el disco cerrado $D = \{z;\ |z| \leq \|A\|\}$.*

Demostración:

Definamos el operador $F : \mathbb{C} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{X})$, $F(\lambda) = \lambda I - A$. Entonces, para todo $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = |\mu - \lambda|,$$

luego, F es continuo. Sea $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{X})$ el espacio de las aplicaciones invertibles. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $\lambda I - A$ no es invertible, luego para $\lambda \in \sigma(A)$ no existe el inverso de $F(\lambda)$, i.e., $\sigma(A)$ es la imagen inversa F^{-1} de $\mathcal{L}(\mathbb{X}) \setminus E$, $\sigma(A) = F^{-1}(\mathcal{L}(\mathbb{X}) \setminus E)$. Como E es abierto (Teorema 6.3.8) entonces $\mathcal{L}(\mathbb{X}) \setminus E$ es cerrado, y como F es continua entonces por la Proposición 3.3.12, $F^{-1}(\mathcal{L}(\mathbb{X}) \setminus E)$ es cerrado, luego $\sigma(A)$ lo será. Para probar que $\sigma(A)$ es acotado[10] basta usar el resultado del ejercicio 6.5.5. Es decir, $\sigma(A)$ es cerrado y acotado, por lo tanto es un compacto (Teorema 4.3.8) contenido en el interior de la bola cerrada del plano complejo $B(0, \|A\|)$. ■

Teorema 6.5.7 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto. Entonces todos los autovalores de A (si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

[10] Por completitud daremos una prueba alternativa de la acotación. Escojamos λ tal que $|\lambda| > \|A\|$, entonces $\|\lambda^{-1}A\| < 1$ así que $(I - \lambda^{-1}A)$ es invertible y por tanto $\lambda I - A$ lo será. Entonces para dichos λ tendremos que $\lambda \notin \sigma(A)$, i.e., $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$.

Demostración: Sea λ un autovalor de A y x su correspondiente autovector, que sin pérdida de generalidad asumiremos normalizado $\|x\| = 1$. Entonces, usando que $Ax = \lambda x$ y que A es hermítico, tenemos

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \Rightarrow \lambda\|x\| = \overline{\lambda}\|x\| \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ y $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Entonces como A es hermítico

$$\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle \Rightarrow \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0,$$

de donde se sigue que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces x_1 y x_2 son ortogonales. ■

Teorema 6.5.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal acotado y autoadjunto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces $r(A) = \|A\|$.*

Demostración: Para $A = \Theta$ el resultado es trivial así que asumiremos que $A \neq 0$. Del ejercicio 6.5.5 (véase también el Teorema 6.5.6) sabemos que $r(A) \leq \|A\|$, así que bastará probar que existe un $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$, i.e., $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$.

Por el teorema 6.2.6 sabemos que $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$, luego existe una sucesión $(x_n)_n$ de $\mathbb{H}$, $\|x_n\| = 1$ para todo n y tal que $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|A\|$, i.e., $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\|A\|$.

Sea $\lambda = \|A\|$ (o $-\|A\|$). Probemos que $\lambda \in \sigma(A)$. Ante todo notemos que, como $\lambda^2 = \|A\|^2 = \lambda^2$ y $\|x_n\| = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 =& \|Ax_n\|^2 - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2 \\ \leq& \|A\|^2 - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2 = 2\lambda(\lambda - \langle Ax_n, x_n\rangle) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

es decir, nuestra sucesión $(x_n)_n$ es tal que $\|Ax_n - \lambda x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Asumamos que $\lambda = \|A\|$ (o, en su caso, $-\|A\|$) no está en $\sigma(A)$, i.e., $\lambda \in \rho(A)$. Como λ está en la resolvente de A entonces para dicho λ el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ está bien definido y es acotado. Pero entonces

$$1 = \|x_n\| = \|(A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)x_n\| \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\|\|(A - \lambda I)x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual es una contradicción. Luego $\lambda = \|A\| \in \sigma(A)$ (o $-\|A\| \in \sigma(A)$). ■

Como hemos visto en dimensión infinita un operador lineal A en general puede no tener autovalores, es decir, los valores $\lambda \in \sigma(A)$ no tienen que ser necesariamente solución de la ecuación (6.5.1). No ocurre así con los operadores compactos y autoadjuntos.

Teorema 6.5.9 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto y compacto. Entonces $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$ es un autovalor de A.*

Demostración: Para $A = \Theta$ el resultado es trivial así que asumiremos que $A \neq 0$. Escojamos $\lambda = \|A\|$ (el caso $\lambda = -\|A\|$ es análogo y lo omitiremos). De la prueba del teorema anterior sabemos que si A es un operador autoadjunto y compacto entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ de $\mathbb{H}$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n y que $Ax_n - \lambda x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como A es compacto, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(Ax_{n_k})_k$ es convergente, así $Ax_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$, que combinada con $Ax_n - \lambda x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nos da $\lambda x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$. Como A es compacto, A es acotado y por tanto continuo así que por un lado tendremos

$$\lambda A x_{n_k} = A(\lambda x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Au \text{ y por otro } \lambda(Ax_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda u \quad \Rightarrow \quad Au = \lambda u.$$

Finalmente, notemos que

$$\|u\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = |\lambda| \lim_{k\to\infty} 1 = |\lambda| \neq 0,$$

luego λ es, efectivamente un autovalor. ■

Teorema 6.5.10 *Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.*

Demostración: Supongamos que el teorema es falso, entonces para algún $\epsilon > 0$ ha de existir una subsucesión $(\phi_{n_k})_k$ de$(\phi_n)_n$ tal que $\|A\phi_{n_k}\| > \epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como A es compacto y la sucesión $(\phi_{n_k})_k$ es acotada (¿por qué?), entonces existe al menos una subsucesión $(\psi_j)_j$ de $(\phi_{n_k})_k$ convergente, tal que $\lim_{j\to\infty} A\psi_j = \psi \neq 0$. Entonces

$$0 \neq \|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle A\psi_j, \psi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \psi_j, A^*\psi \rangle = 0,$$

pues $A^*\psi \in \mathbb{H}$ y $\langle \psi_j, A^*\psi \rangle$ es el j-ésimo coeficiente de Fourier c_j de $A^*\psi$ el cual sabemos, por (5.2.5), que tiende a cero si $j \to \infty$. ■

Teorema 6.5.11 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces A tiene o bien un número finito de autovalores λ_n reales distintos o, si el número de autovalores es infinito, entonces, es numerable y si los ordenamos de mayor a menor $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Demostración: Del teorema 6.5.9 se sigue que el conjunto de autovalores no es vacío, luego está compuesto por un número finito o infinito de elementos (que son números reales por el Teorema 6.5.7). Sea λ_1 tal que $|\lambda_1| = \|A\|$ y sea x_1 el correspondiente autovector (normalizado a la unidad, i.e. $\|x_1\| = 1$). Sea $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$ y definamos $\mathbb{H}_2$ el espacio de todos los vectores ortogonales a x_1, i.e.,

$$\mathbb{H}_2 = \{x \in \mathbb{H} \,|\, \langle x, x_1\rangle = 0\},$$

es el complemento ortogonal de x_1. Nótese que por el ejercicio 5.2.14, $\mathbb{H}_2$ es cerrado, luego es un espacio de Hilbert (¿por qué?). Además, para todo $x \in \mathbb{H}_2$,

$$\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \lambda_1\langle x, x_1\rangle = 0,$$

es decir, $\mathbb{H}_2$ es invariante respecto a la acción de A.

Sea $A|_{\mathbb{H}_2}$ la restricción de A al espacio $\mathbb{H}_2$. Nótese que $A|_{\mathbb{H}_2}$ es autoadjunto y compacto[11] (pues coincide con A en $\mathbb{H}_2$, y A lo es.) Si $A|_{\mathbb{H}_2}$ no es el operador nulo, entonces podremos aplicar el mismo razonamiento de antes, por lo que existirá λ_2 y x_2 tales que $|\lambda_2| = \|A|_{\mathbb{H}_2}\|$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, donde además por la definición de norma, $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Ahora construimos el espacio

$$\mathbb{H}_3 = \{x \in \mathbb{H}_2 \,|\, \langle x, x_2\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{H} \,|\, \langle x, x_1\rangle = \langle x, x_2\rangle = 0\}$$

que es invariante respecto a A, y así sucesivamente.

Así podemos seguir hasta que en cierto paso $n+1$, $A|_{\mathbb{H}_{n+1}} = 0$, obteniendo de esta forma una sucesión finita de autovalores $(\lambda_k)_{k=1}^n$ con sus correspondientes autovectores normalizados[12] $(x_k)_{k=1}^n$ tales que

$$|\lambda_1| = \|A|_{\mathbb{H}_1}\| \geq |\lambda_2| = \|A|_{\mathbb{H}_2}\| \geq \cdots \geq |\lambda_n| = \|A|_{\mathbb{H}_n}\| \neq 0.$$

Si $A|_{\mathbb{H}_k} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces existen infinitos autovalores distintos λ_n con sus correspondientes autovectores x_n normalizados (que pueden ser más de uno), que son numerables pues $\mathbb{H}$ es separable (¿por qué?). Ahora bien, por el Teorema 6.5.10 tenemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Ax_n\rangle = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n|^2,$$

de donde se sigue que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

[11] Cualquiera sea la sucesión acotada $(y_n)_n \in \mathbb{H}_2$, $(Ay_n)_n$ contiene una subsucesión convergente, pues A es compacto en $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}_2 \subset \mathbb{H}$.

[12] Es importante destacar que para cada λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ puede haber más de un autovector.

Nota 6.5.12 *Existe otra forma de probar que* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *En efecto, supongamos que hay infinitos* λ_n *distintos pero que* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. *Entonces existe un* $\epsilon > 0$ *tal que infinitos* λ_{n_k} *son tales que* $|\lambda_{n_k}| > \epsilon$. *Construyamos con dichos elementos una sucesión que denotaremos por* $(\lambda_k)_k$. *Como todos los elementos de* $(\lambda_k)_k$ *son distintos, el Teorema 6.5.7 garantiza que sus correspondientes autovectores son ortogonales* x_k, *i.e.,* $\langle x_{k_1}, x_{k_2}\rangle = 0$ *si* $k_1 \neq k_2$. *Si calculamos ahora la norma*

$$\|Ax_{k+p} - Ax_k\|^2 = \|\lambda_{k+p}x_{k+p} - \lambda_k x_k\|^2 = |\lambda_{k+p}|^2 + |\lambda_k|^2 > 2\epsilon^2, \quad \forall k, p \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $(Ax_k)_k$ *no contiene ninguna subsucesión de Cauchy y por tanto no contiene ninguna sucesión convergente (¿por qué?) lo que contradice que* A *sea un operador compacto.*

Teorema 6.5.13 (Teorema espectral) *Sea* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* A *un operador lineal* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *autoadjunto y compacto. Existe una sucesión numerable (finita o infinita) de autovectores ortonormales* $(x_n)_n$ *de* A *cuya correspondiente sucesión de autovalores denotaremos por* $(\lambda_n)_n$ *tales que,*

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n, \qquad \forall x \in \mathbb{H}, \tag{6.5.2}$$

donde n *recorre todos los autovalores, incluida su multiplicidad*[13] *Además, se tiene que:*

1. *En (6.5.2) aparecen todos los autovalores de* A.

2. *Si la sucesión de autovalores* $(\lambda_n)_n$ *es infinita se puede reordenar de forma que* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. *Los correspondientes espacios*[14] *subespacios vectoriales* $\ker(\lambda_n I - A)$, *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *son de dimensión finita, siendo la dimensión de estos el número de veces que aparece un mismo* λ_k *en la fórmula (6.5.2).*

[13] Es decir, si el autovalor λ_k tiene asociado p_k autovectores, en (6.5.2) habrá un sumando para cada uno de los autovectores. Ver la fórmula equivalente (6.5.4).

[14] El espacio $\ker(\lambda_n I - A)$ no son más que el núcleo del operador $A - \lambda_n I$, i.e., el conjunto de $x \in \mathbb{H}$ tales que $(A - \lambda_n I)x = 0$, i.e., los subespacios vectoriales asociados a cada autovalor λ_n.

Demostración: Utilizando la misma construcción que usamos en la prueba del teorema 6.5.11 obtenemos una sucesión de autovalores $(\lambda_k)_{k=1}^n$ con sus correspondientes autovectores normalizados $(x_k)_{k=1}^n$ (para cada λ_k puede haber más de un autovector, en función de la *multiplicidad* del mismo que escogeremos ortonormales) tales que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Durante el proceso hemos construido además la cadena de subespacios invariantes respecto a A

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \supseteq \mathbb{H}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{H}_n$$

donde $\mathbb{H}_{k+1} = \{x \in \mathbb{H}_k \mid \langle x, x_j \rangle = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$.

Supongamos que $A|_{\mathbb{H}_{n+1}} = 0$, entonces el proceso acaba (caso finito). Sea, en este caso, $y_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k$. Entonces

$$\langle y_n, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{\delta_{j,k}} = \langle x, x_j \rangle - \langle x, x_j \rangle \underbrace{\|x_j\|}_{=1} = 0.$$

Luego, $y_n \in \mathbb{H}_{n+1}$ y por tanto $Ay_n = 0$, i.e.,

$$0 = Ay_n = Ax - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle Ax_k \quad \Rightarrow \quad Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k,$$

como se quería probar.

El caso infinito es similar. Ante todo notemos que en este caso tenemos una sucesión λ_n tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (ver teorema 6.5.11). Definamos nuevamente el vector $y_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k$. Usando (5.2.4) se sigue que $\|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Además, como ya vimos $y_n \in \mathbb{H}_{n+1}$, luego, usando que $Ay_n = A|_{\mathbb{H}_{n+1}} y_n$, y $\|A|_{\mathbb{H}_{n+1}}\| = |\lambda_{n+1}|$ obtenemos

$$\|Ay_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Ay_n = 0,$$

de donde se sigue la igualdad buscada (6.5.2).

Comprobemos ahora que todos los autovalores de A están presentes en la fórmula (6.5.2). Esta cuestión es de suma importancia pues en la prueba hemos usado los autovalores obtenidos gracias al Teorema 6.5.9 por lo que procede preguntarse si existen otros autovalores de A no nulos distintos

a los anteriores. Comprobemos que eso es imposible. Supongamos que existe un autovalor $\lambda \neq 0$ distinto de los autovalores λ_k que aparecen en la suma (6.5.2), i.e., $\lambda \neq \lambda_k$, para todo k, y sea $x \neq 0$ su correspondiente autovector normalizado a la unidad. Por el Teorema 6.5.7, x es ortogonal a todos los x_k, i.e., $\langle x, x_k \rangle = 0$ para todo k. Pero entonces, aplicando la fórmula (6.5.2) a dicho autovector x tenemos

$$\lambda x = Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, 0 \, x_n = 0,$$

i.e., o $\lambda = 0$ o $x = 0$, lo que es una contradicción. Que en la fórmula (6.5.2) aparezcan todos los autovalores no nulos de A tiene una implicación muy importante y es que, formalmente, el proceso de encontrar los autovalores no nulos de A basado en el Teorema 6.5.9 permite encontrarlos ***todos***.

Probemos ahora que los autoespacios $\mathbb{X}_k = \ker(\lambda_k I - A)$, para cada $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, son de dimensión finita. Supongamos que $\dim \mathbb{X}_k = \infty$ para algún k, con $\lambda_k \neq 0$. Entonces, existe una sucesión de autovectores linealmente independiente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que, sin pérdida de generalidad asumiremos ortonormales (¿por qué?), tal que $Ax_j = \lambda_k x_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Pero entonces, por el Teorema 6.5.10, $Ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de donde se sigue $\lambda_k x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo cual implica $\lambda_k = 0$, que es una contradicción.

Probemos finalmente que, en caso de que $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, la dimensión de $\ker(\lambda_k I - A) = p_k$, donde p_k es el número de veces que aparece λ_k en la fórmula (6.5.2) (es decir, la multiplicidad del autovalor λ_k). Por simplicidad denotemos por $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(p_k)}$, los p_k autovectores linealmente independientes asociados a λ_k. Supongamos que $\dim \ker(\lambda_k I - A) > p_k$, entonces existe al menos un $x \in \ker(\lambda_k I - A)$ que es linealmente independiente de los vectores $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(p_k)}$ y que asumiremos, sin pérdida de generalidad, ortogonal a ellos (¿por qué?). Entonces está claro que dicho x es ortogonal a todos los vectores x_n que aparecen en la fórmula (6.5.2) (ya sea porque los x_n corresponden a autovalores distintos a λ_k o bien sean los $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(p_k)}$ de antes), i.e., $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo n, luego usando (6.5.2) obtenemos

$$0 \neq \lambda_k x = Ax = \sum_{n} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n = \sum_{n} \lambda_n \, 0 \, x_n = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

Como hemos visto en el teorema anterior, cuando $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, la dimensión de $\ker(\lambda_k I - A) = p_k$, donde p_k es el número de veces que

aparece λ_k en la fórmula (6.5.2). Sea $\mathbb{H}_k = \operatorname{span}(x_{1,k}, \cdots, x_{p_k,k})$ el subespacio generado por los autovectores asociados a cada autovalor λ_k (que sabemos que son finito-dimensionales) y que tomaremos ortonormales entre sí (si no aplicamos Gram-Schmidt). Sea el operador $P_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido, para cada $k \in \mathbb{N}$ como

$$P_k x = \sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k} = \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} x_{i,k}. \tag{6.5.3}$$

Es sencillo comprobar que P_k es un operador de proyección[15] (ver ejercicio 6.26), pues es autoadjunto e idempotente. Para probarlo nótese que P_k es suma finita de operadores de rango 1 del tipo $\widehat{P}_i = \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k}$ que, como hemos visto en la proposición 6.4.7, son compactos, y por el teorema 6.4.6 P_k son compactos, luego acotados y, por tanto, existen sus correspondientes adjuntos. Por otro lado, para todos $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{P}_i^* x, y \rangle &= \langle x, \widehat{P}_i y \rangle = \langle x, \langle y, x_i \rangle x_i \rangle = \overline{\langle y, x_i \rangle} \langle x, x_i \rangle = \langle x_i, y \rangle \langle x, x_i \rangle \\ &= \langle \langle x, x_i \rangle x_i, y \rangle = \langle \widehat{P}_i x, y \rangle,\end{aligned}$$

i.e., $\widehat{P}_i$ es autoadjunto, luego P_k lo es.

Que P_k es idempotente es *sencillo* de comprobar pues

$$\begin{aligned}P_k^2 x &= P_k \left(\sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} x_{i,k} \right) = \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} P_k x_{i,k} = \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} \sum_{j=1}^{p_k} \underbrace{\langle x_{i,k}, x_{j,k} \rangle}_{=\delta_{j,k}} x_{j,k} \\ &= \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} x_{i,k} = P_k x\end{aligned}$$

De hecho, $\mathcal{I}(P_k) = \ker(\lambda_k I - A)$.

Usando los operadores P_k el teorema espectral 6.5.13 se puede reescribir como para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$Ax = \sum_k \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k} \right), \tag{6.5.4}$$

donde, k recorre todos los autovalores $\lambda_k \neq 0$. La expresión anterior se puede escribir de forma compacta como sigue:

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x, \tag{6.5.5}$$

[15] Para la definición de operador de proyección ver el ejercicio 5.11.

donde, n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ siendo P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$ definidos por (6.5.3).

De hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.5.14 *Todo operador autoadjunto y compacto se puede escribir de la forma*

$$A = \sum_n \lambda_n P_n, \tag{6.5.6}$$

donde n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ siendo P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$ definidos por (6.5.3).

Demostración: Vamos a probarlo en el caso cuando hay infinitos autovalores pues en caso contrario es *trivial*. Para probar que la serie converge en la norma de operadores basta probar que la sucesión de sus sumas parciales $A_k = \sum_{n=1}^k \lambda_n P_n$ es de Cauchy, pues el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ es de Banach (ver teorema 6.3.6). Para ello usamos que[16] $P_n = \langle x, x_n\rangle x_n$, luego

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=m+1}^k \lambda_n P_n x\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=m+1}^k \lambda_n P_n x, \sum_{i=m+1}^k \lambda_i P_i x\right\rangle = \sum_{n=m+1}^k \lambda_n^2 |\langle x, x_n\rangle|^2 \\ &\leq \lambda_{m+1}^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

Como $\lambda_m \to 0$, entonces si tomamos m suficientemente grande podemos hacer $\lambda_m^2 < \epsilon^2$, cualquiera sea $\epsilon > 0$. Luego $\left\|\sum_{n=m+1}^k \lambda_n P_n\right\| < \epsilon$, i.e., A_k es de Cauchy, luego es convergente en la norma de operadores. Para probar la fórmula (6.5.6) calculamos

$$\begin{aligned}\left\|A - \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n x\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=m+1}^\infty \lambda_n P_n x, \sum_{n=m+1}^\infty \lambda_n P_n x\right\rangle = \sum_{n=m+1}^\infty \lambda_n^2 |\langle x, x_n\rangle|^2 \\ &\leq \lambda_{m+1}^2 \|x\|^2 \leq \epsilon^2 \|x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\sum_{n=m+1}^\infty \lambda_n P_n\right\| < \epsilon\end{aligned}$$

pues, como ya vimos, $\lambda_m \to 0$. ■

[16] Recordemos que en la suma hay que tener en cuenta la multiplicidad de los λ_n y que λ_n^2 son una sucesión monótona decreciente que tiende a cero (ver teorema 6.5.11).

Corolario 6.5.15 (Hilbert-Schmidt) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces existe un sistema ortogonal completo (base ortonormal) de vectores ortonormales $(e_n)_n$ de $\mathbb{H}$ consistente en los correspondientes autovectores de A, incluido los asociados al autovalor $\lambda = 0$, caso que lo tuviera.*

Demostración: Del Teorema espectral 6.5.13 se sigue que existe un conjunto de autovectores (finito o infinito) $(\phi_n)_n$ tal que

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \qquad \forall x \in \mathbb{H}. \tag{6.5.7}$$

Asumamos que $\lambda_n \neq 0$ (si hay algún $\lambda_n = 0$ este se puede omitir de la suma). Como el núcleo de A, $\ker A \subset \mathbb{H}$ (que coincide con el subespacio vectorial generado por los autovectores correspondientes a $\lambda = 0$) es a su vez un espacio de Hilbert separable (es un cerrado) existirá una sistema (numerable) ortogonal completo que denotaremos por $(\psi_n)_n$. Dicho sistema de vectores estará constituido por los autovectores correspondientes al autovalor 0. Sea ahora un autovector cualquiera ϕ_m correspondiente al autovalor $\lambda_m \neq 0$. Entonces ϕ_m será ortogonal a todos los ψ_n y el sistema $(\phi_m)_m$ será ortogonal a $(\psi_n)_n$. Además de (6.5.7) se tiene que para todo $x \in \mathbb{H}$

$$A\left(x - \sum_m \langle x, \phi_m \rangle \phi_m\right) = Ax - \sum_m \langle x, \phi_m \rangle A\phi_m = 0,$$

i.e., $x - \sum_m \langle x, \phi_m \rangle \phi_m \in \ker A$, luego podemos desarrollarlo en serie de Fourier en la base de $\ker A$ $(\psi_n)_n$ de forma que obtenemos para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$x - \sum_m \langle x, \phi_m \rangle \phi_m = \sum_n \langle x, \psi_n \rangle \psi_n \;\Rightarrow\; x = \sum_m \langle x, \phi_m \rangle \phi_m + \sum_n \langle x, \psi_n \rangle \psi_n,$$

i.e., el sistema $(\phi_m)_m \bigcup (\psi_n)_n$ es completo (Teorema 5.2.5) que podemos ortogonalizar utilizando el método de Gram-Schmidt obteniendo el sistema ortonormal (numerable) $(e_n)_n$ (recordemos que para autovectores correspondientes a autovalores distintos ya teníamos la ortogonalidad, así que sólo es necesario aplicarlo a los autovectores correspondientes a un mismo autovalor), luego tendremos $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$ de donde se sigue el teorema. ■

Nótese que si denotamos por $(\phi_n)_n$ a la sucesión de autovectores ortonormales (incluyendo la multiplicidad) de A, y por $(\psi_m)_m$ la base ortonormal del núcleo de A, que coincide con el autoespacio asociado al autovalor

0, entonces el corolario anterior nos dice que cualquier $x \in \mathbb{H}$ se puede escribir como combinación lineal del sistema ortonormal $(\phi_n)_n \bigcup (\psi_m)_m$, y por tanto, existe un único $y \in \mathcal{N}(A)$ tal que

$$x = y + \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \langle y, \phi_n \rangle = 0, \ \forall n. \tag{6.5.8}$$

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que todo operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto en $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert separable, se le puede hacer corresponder una matriz (finita o infinita) que además es diagonalizable y en cuya diagonal aparecen los correspondientes autovalores.

Supongamos ahora que dos operadores lineales acotados comparten un sistema común de autovectores y que dicho sistema es completo. Es decir que $A\phi_n = \alpha_n \phi_n$ y $B\phi_n = \beta_n \phi_n$, y para todo $x \in \mathbb{H}$ se tiene que $x = \sum_i c_i \phi_i$. Entonces es sencillo comprobar que $(AB - BA)x = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, i.e., A y B conmutan. Una consecuencia del corolario anterior 6.5.15 es el recíproco de dicho resultado:

Teorema 6.5.16 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert separable. Si A y B conmutan, entonces ambos tienen un sistema común completo de autovectores.*

Demostración: Sea λ un autovalor de A y sea S el correspondiente subespacio lineal generado por los autovectores de A. Para todo $x \in S$ tenemos $ABx = BAx = \lambda Bx$, i.e., Bx es también es un autovector de A correspondiente a λ, $Bx \in S$, así que el espacio S es un subespacio vectorial de $\mathbb{H}$ invariante respecto a B y es a su vez un espacio de Hilbert. Como B es autoadjunto y compacto, el Corolario anterior 6.5.15 nos asegura que S tiene una base ortonormal de autovectores de B, que además son autovectores de A pues están en S. Repitiendo en proceso para cada uno de los subespacios S de A obtenemos para cada uno de dichos subespacios la correspondiente base de autovectores. La unión de todas ellas es la base común buscada. ■

Antes de terminar este apartado conviene hacer una aclaración. El lector avispado recordará el ejemplo 6.2.9, donde estudiamos el operador definido por (6.2.4). Si comparamos (6.2.4) con (6.5.2) podemos descubrir que efectivamente existen operadores no necesariamente autoadjuntos y compactos que admitan una representación del tipo (6.2.4). En el

caso del ejemplo 6.2.9 basta que $\mu_n \not\to 0$ cuando $n \to \infty$ para que no sea compacto, o que μ_n no sean reales para que no sea autoadjunto. De hecho, se puede probar una representación similar a (6.2.4) para operadores autoadjuntos acotados (no necesariamente compactos) e incluso no acotados. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, [6, Capítulos 9 y 10] o [9, Capítulo 13].

Finalmente, queremos hacer notar que los problemas 6.29 y 6.30 muestran dos aplicaciones interesantes de la fórmula (6.5.5), así como del Teorema espectral 6.5.13. De hecho, como se ve en el problema 6.30, es suficiente con saber que existe una descomposición del tipo (6.5.5) para poder resolver un sinnúmero de problemas interesantes.

6.6. Problemas

Problema 6.1 Sea T, $T : L^2([0,1]) \mapsto L^2([0,1])$, el operador integral del problema[17] 4.8:

$$y = Tx, \qquad y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{6.6.1}$$

con $k(t,\tau)$ continua en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. Demuestra que el adjunto de dicho operador es el operador $T^* : C([0,1]) \mapsto C([0,1])$, $z = T^*x$

$$z(t) = \int_0^1 \overline{k(\tau,t)}x(\tau)d\tau. \tag{6.6.2}$$

Luego $T^* = T$ si y sólo si $\overline{k(\tau,t)} = k(t,\tau)$.

Solución: Usando Fubini,

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)\overline{y(t)}dt = \int_0^1\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\overline{y(t)}d\tau dt \\ &= \int_0^1 x(\tau)\overline{\left(\int_0^1 \overline{k(t,\tau)}y(t)dt\right)}d\tau = \langle x, T^*y\rangle \quad \Rightarrow \quad \text{se tiene (6.6.2).} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

[17] Recordemos que por $L^2([0,1])$ denotamos el completamiento del espacio $C^2_{[0,1]}$.

Problema 6.2 Sea $(\phi_n)_n$ una base completa del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sean dos operadores lineales y acotados A, B definidos sobre $\mathbb{H}$. Prueba que si $A\phi_n = B\phi_n$, para todo n, entonces $A = B$.

Solución: Sea $x \in \mathbb{H}$ cualquiera y sea $(\phi_n)_n$ una base completa de $\mathbb{H}$. Definamos el operador $C = A - B$, que es lineal y acotado. Además C es tal que $C\phi_n = 0$ para todo n. Pero entonces, cualquiera sea $x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_n x_n\phi_n$, luego $Cx = C\sum_n x_n\phi_n = \sum_n x_n C\phi_n = \sum_n x_n \cdot 0 = 0$. Luego $C = 0$ y por tanto $A = B$. ■

Problema 6.3 Sean $(e_n)_n$ y $(f_n)_n$ bases ortonormales de los espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$, respectivamente y sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ lineal y acotado. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ converge si y solo si lo hace la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$, en cuyo caso se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2.$$

Deduce, de lo anterior, que la cantidad $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ es independiente de la base ortogonal $(e_n)_n$ escogida.

Solución: Como $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$, entonces existe el operador adjunto, $A^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$ y se tiene (6.1.1), para todo $x \in \mathbb{H}$ e $y \in \mathbb{H}'$. Usando la identidad de Parseval (5.2.6) en $\mathbb{H}$ con $x = A^* f_m$ y $\phi_n = e_n$, tenemos, para todo $m = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\|A^* f_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle A^* f_m, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_m, Ae_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, f_m\rangle|^2 ,$$

donde en la última igualdad hemos usado la propiedad de simetría del producto escalar. Análogamente, la identidad de Parseval en $\mathbb{H}'$ nos da

$$\|Ae_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2$$

Luego, juntando las dos últimas expresiones, obtenemos

$$\sum_{m=1}^{N} \|A^* f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, f_m\rangle|^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, f_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2.$$

De lo anterior se sigue que si, $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$, entonces $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2 < \infty$, también lo es. Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^* j_m\|^2.$$

Luego, si $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2 < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$. Tomando $N \to \infty$ en ambas desigualdades obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, f_m\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Ae_k, f_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2.$$

Probemos ahora que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ no depende de la base escogida. Sea $(\widetilde{e}_n)_n$ otra base ortonormal de $\mathbb{H}$ distinta de $(e_n)_n$. Entonces, si aplicamos la igualdad anterior primero a las bases $(\widetilde{e}_n)_n$ y $(f_n)_n$, y luego a las bases $(f_n)_n$ y $(e_n)_n$, deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A\widetilde{e}_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \ ,$$

luego, la cantidad $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ es independiente de la base ortonormal $(e_n)_n$ escogida. ■

Problema 6.4 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ un operador lineal y acotado, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ espacios de Hilbert. Se dice que A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt[18] si existe una base ortonormal completa $(\phi_n)_n$ en $\mathbb{H}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2 < +\infty$. Prueba que:

1. El espacio de todos los operadores del tipo Hilbert-Schmidt son un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ de los operadores lineales y acotados, i.e, prueba que si A y B son del tipo Hilbert-Schmidt, entonces $A + B$ y λA también lo son.

2. A es del tipo Hilbert-Schmidt si y solo si A^* lo es.

Solución: 1. Para probar que la suma $A + B$ es del tipo Hilbert-Schmidt usamos que

$$\|(A + B)\phi_n\|^2 = \|A\phi_n + B\phi_n\|^2 \leq 2(\|A\phi_n\| + \|B\phi_n\|^2),$$

que se sigue directamente de la desigualdad del paralelogramo (5.1.3) tomando $x = A\phi_n$ e $y = B\phi_n$, y, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|(A + B)\phi_n\|^2$ converge. Que λA es del tipo Hilbert-Schmidt es inmediato ya que $\|(\lambda A)\phi_n\| = |\lambda|\|A\phi_n\|$.

2. Basta usar el resultado del problema 6.3. ■

[18] Como hemos visto en el problema anterior 6.3 la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2$ es independiente de la base.

Problema 6.5 Prueba que el operador integral T del problema 6.1, cuando $k(t,\tau)$ satisface la condición

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 dt d\tau < +\infty, \tag{6.6.3}$$

es un operador del tipo Hilbert-Schmidt (ver problema 6.4).

Solución: Sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal de $L^2([0,1])$.

$$(T\phi_n)(t) = \int_0^1 k(t,\tau)\phi_n(\tau)d\tau = \langle k_t, \overline{\phi_n}\rangle,$$

donde $k_t(\tau) := k(t,\tau)$, es decir, consideramos t como un parámetro y τ es la variable. Ahora bien, $(\overline{\phi_n})_n$ es a su vez una base completa[19] de $L^2([0,1])$, así que usando la identidad de Parceval (5.2.6) para la función k_t, como función de τ, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|T\phi_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |\langle k_t, \overline{\phi_n}\rangle|^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle k_t, \overline{\phi_n}\rangle|^2\right) dt = \int_0^1 \|k_t\|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_t(\tau)|^2 d\tau\right) dt = \int_0^1 \int_0^1 |k_t(\tau)|^2 d\tau dt < +\infty.\end{aligned}$$

Nótese que en la secuencia de igualdades hemos intercambiado la serie con la integral, lo cual no es obvio en general, no obstante si k es continua en un compacto (como es el caso) es cierto, o si k es integrable podemos usar el teorema de la convergencia dominada. Finalmente, para la última igualdad podemos usar el Teorema de Fubini que nos asegura que si se tiene (6.6.3), entonces $k_t \in L^2([0,1])$ y además se tiene la última igualdad de la expresión anterior. ■

Problema 6.6 Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces existen dos únicos operadores autoadjuntos[20] A, B de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ tales que

$$T = A + iB, \qquad A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}. \tag{6.6.4}$$

Solución: Como T es un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert, existe su adjunto T^*. Un cálculo directo usando la proposición 6.1.4 se tiene que

[19] Esto es consecuencia de la propiedad 4. del teorema 5.2.5.

[20] A la descomposición (6.6.4) se denomina descomposición cartesiana de un operador.

los operadores A y B definidos mediante la fórmula anterior son efectivamente autoadjuntos. Probemos que la descomposición $T = A + iB$ es única. Para ello supongamos que existen otros operadores autoadjuntos $A \neq \tilde{A}$ y $B \neq \tilde{B}$ tales que $T = \tilde{A} + i\tilde{B}$. Entonces $T^* = \tilde{A}^* - i\tilde{B}^* = \tilde{A} - i\tilde{B}$, luego $T + T^* = 2\tilde{A}$ y $T - T^* = 2i\tilde{B}$, de donde se sigue que $A = \tilde{A}$ y $B = \tilde{B}$, lo cual es una contradicción. ■

Problema 6.7 Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea A un operador autoadjunto. Prueba que T^*AT es autoadjunto.

Solución: Es inmediato de la definición de operador autoadjunto y la propiedad 7 de la proposición 6.1.4. ■

Problema 6.8 Prueba que si A es autoadjunto, entonces cualquier polinomio con coeficientes reales de A, i.e., $P_n(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, también es autoadjunto.

Solución: Es inmediato del ejercicio 6.2.3. ■

Problema 6.9 *Prueba que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, entonces $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{I}(A^*))^\perp$. Es decir, el (espacio) núcleo de un operador lineal acotado coincide con el complemento ortogonal de la imagen (rango) de su adjunto A^*.*

Solución: Como $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, entonces existe el adjunto A^* de A. Sea $x \in \mathcal{N}(A)$, i.e., $Ax = 0$. por tanto,

$$\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle = 0,$$

i.e., si $x \in \mathcal{N}(A)$, entonces $x \perp A^* y$ para todo $y \in \mathbb{H}$, y por tanto $x \in (\mathcal{I}(A^*))^\perp$, luego, $\mathcal{N}(A) \subseteq (\mathcal{I}(A^*))^\perp$. Por otro lado, si $x \perp \mathcal{I}(A^*)$, entonces

$$\forall y \in \mathbb{H}, \quad 0 = \langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \text{(punto 4. del ejercicio 5.1.2)} \quad Ax = 0,$$

i.e., $x \in \mathcal{N}(A)$, luego $(\mathcal{I}(A^*))^\perp \subseteq \mathcal{N}(A)$, de donde se sigue el resultado. ■

Problema 6.10 Sea un operador lineal y acotado $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que A es antihermítico si $A^* = -A$. Prueba que A es antihermítico si y solo si el operador $B = iA$ es hermítico (autoadjunto).

Solución: Si $A^* = -A$, entonces multiplicando por i y usando la proposición 6.1.4 tenemos $(iA)^* = iA$, luego B es autoadjunto. Que B autoadjunto implica que A es antihermítico es inmediato. ■

Problema 6.11 Un operador lineal y acotado $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, se dice que es positivo si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$ y se denota por $A \geq 0$. Prueba las siguientes afirmaciones:

1. Si $A \geq 0$ entonces A es autoadjunto (ver teorema 6.2.2).

2. Si $A \geq 0$, $B \geq 0$, y $\alpha \geq 0$, entonces $A + B \geq 0$ y $\alpha A \geq 0$.

3. Si $A \geq 0$ y $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal y acotado, entonces $T^* AT \geq 0$.

4. Cualquiera sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal y acotado, $A^* A \geq 0$.

5. Si $A \geq 0$, $B \geq 0$ y $A+B = \Theta$, entonces $A = B = \Theta$ (Θ es el operador nulo del ejemplo 4.4.3).

6. Si $A \geq 0$ entonces, para todos $x, y \in \mathbb{H}$ se cumple
$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle.$$

7. Si $A \geq 0$, entonces $Ax = 0$ si y solo si $\langle Ax, x\rangle = 0$ (usa el punto anterior).

Ayuda para probar 6: Usa que $A \geq 0$, i.e., $\langle Av, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{H}$. Elige $v = x + \lambda\langle Ax, y\rangle y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y razona como en la prueba del teorema 5.1.6.

Solución: 1. Si A es positivo, entonces $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, o sea $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Entonces el teorema 6.2.2 nos asegura que A es autoadjunto. No obstante daremos una prueba general que no necesita del teorema 6.2.2. $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, para todos $x, y \in \mathbb{H}$. Por un lado tenemos la identidad[21]

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(&\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\big[\langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle\big]\Big),\end{aligned}$$

[21] Cuya comprobación, que es directa usando las propiedades del producto escalar, dejamos al lector como ejercicio.

y, por el otro, intercambiando x e y, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle Ay, x\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle A(y+x), y+x\rangle - \langle A(y-x), y-x\rangle \\ &\qquad + i\langle A(y+ix), y+ix\rangle - i\langle A(y-ix), y-ix\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\qquad - i\big[\langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle\big]\Big) = \overline{\langle Ax, y\rangle}.\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de comparar el valor obtenido de $\langle Ay, x\rangle$ con en valor de $\langle Ax, y\rangle$ obtenido antes pues, por hipótesis, la expresión entre corchetes, es real. Luego tenemos,

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle,$$

de donde se sigue que $A = A^*$.

2. $\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \geq 0$, $\langle (\alpha A)x, x\rangle = \alpha\langle Ax, x\rangle \geq 0$.
3. $\langle T^*ATx, x\rangle = \langle ATx, Tx\rangle = \langle A(Tx), (Tx)\rangle = \langle Az, z\rangle \geq 0$.
4. $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$.
5. Se sigue de

$$0 = \langle (\Theta)x, x\rangle\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \geq 0,$$

pues, por hipótesis, para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ y $\langle Bx, x\rangle \geq 0$, luego $\langle Ax, x\rangle = 0$ y $\langle Bx, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, y del corolario 6.2.7 se sigue que A y B son el operador nulo.

6. Efectivamente, calculamos $\langle Av, v\rangle \geq 0$, con $v = x + \lambda\langle Ax, y\rangle y$, y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle Av, v\rangle = \langle Ax, x\rangle + \lambda^2|\langle Ax, y\rangle|^2\langle Ay, y\rangle + \lambda\big(\langle Ax, y\rangle\langle Ay, x\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle}\langle Ax, y\rangle\big).$$

Como A es positivo, entonces es autoadjunto (ver punto 1), luego $\langle Ax, y\rangle\langle Ay, x\rangle = \langle Ax, y\rangle\overline{\langle x, Ay\rangle} = \langle Ax, y\rangle\overline{\langle Ax, y\rangle}$, de donde tenemos

$$\lambda^2|\langle Ax, y\rangle|^2\langle Ay, y\rangle + 2\lambda|\langle Ax, y\rangle|^2 + \langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

Ll miembro derecho de la desigualdad anterior es un polinomio en λ de grado 2, así que su discriminante ha de ser menor o igual a cero, luego

$$4|\langle Ax, y\rangle|^4 \leq 4|\langle Ax, y\rangle|^2\langle Ay, y\rangle\langle Ax, x\rangle,$$

de donde se sigue el resultado[22].

7. Si $Ax = 0$ es obvio que $\langle Ax, x\rangle = 0$. Si $\langle Ax, x\rangle = 0$, entonces el punto 6 anterior nos dice que, para todo $y \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, y\rangle = 0$, luego el punto cuatro del ejercicio 5.1.2 implica que $Ax = 0$. ■

Problema 6.12 Prueba que el operador T definido en el ejemplo 6.2.9 es positivo si y solo si para todo n, $\mu_n \geq 0$. Otro ejemplo de operador positivo es el operador multiplicación (ver ejemplo 6.1.2) cuando $f(t) \geq 0$ en $[a, b]$.

Solución: Usando las expresiones (6.2.3) y (6.2.6) obtenemos que, para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$\langle Tx, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |c_k|^2,$$

de donde se sigue que, si $\mu_k \geq 0$ para todo k, T es positivo. Por otro lado, usando (6.2.2), y teniendo en cuenta que $A \geq 0$, tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \langle T\phi_n, \phi_n\rangle = \mu_n,$$

de donde se sigue el resultado. Para el caso del operador de multiplicación

$$\langle Tx, x\rangle = \int_a^b f(t)|x(t)|^2 d\tau \geq 0,$$

si $f(t) \geq 0$ en $[a, b]$. ■

Problema 6.13 Sean $U, V : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, dos operador unitarios en un espacio de Hilbert $\mathbb{H} \neq \{0\}$. Prueba que

1. U es una isometría, i.e., $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.
2. $\|U\| = 1$.
3. Su inverso U^{-1} es unitario.
4. UV es unitario
5. U es normal.

[22] Se asume que $A \neq \Theta$.

Solución: Recordemos que U es unitario si $U^* = U^{-1}$. Para probar 1. tenemos

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, U^{-1}Ux\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

2. Se sigue de lo anterior pues $\|Ux\|/|x\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Veamos 3. Como U es biyectivo U^{-1} lo es, además, como U es unitario

$$U^{-1} = U^* \Rightarrow (U^{-1})^* = (U^*)^* = U = (U^{-1})^{-1} \quad \Rightarrow \quad (U^{-1})^{-1} = (U^{-1})^*.$$

5. Como $U^{-1} = U^*$, entonces $U^*U = U * U^* = I$. ■

Problema 6.14 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operador lineal compacto y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ uno acotado, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces los operadores AB y BA son compactos.

Solución: Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de $\mathbb{H}$. Como B es acotado, entonces la sucesión $(Bx_n)_n$ es acotada y como A es compacto, de la sucesión $(ABx_n)_n$ se puede extraer una subsucesión convergente, luego AB es compacto. Sea ahora $(x_n)_n$ una sucesión acotada de $\mathbb{H}$. Como A es compacto, existe una subsucesión $(Ax_{n_k})_k$ de $(Ax_n)_n$ que converge. Ahora bien, B es acotado, luego es continuo (ver Teorema 4.4.17), por lo que la subsucesión $(BAx_{n_k})_k$ converge, luego BA es compacto. ■

Problema 6.15 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, y $\mathcal{I}(A) = \mathbb{H}$. Prueba que si A tiene inverso, y dicho inverso es acotado, entonces el adjunto A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Si además, A es autoadjunto, entonces A^{-1} también lo es.

Solución: Probaremos que $(A^{-1})^*A^*x = A^*(A^{-1})^*x$ para todo $x \in \mathbb{H}$ de donde se deduce el resultado. Sea $y \in \mathbb{H}$ cualquiera, entonces, como A^{-1} es acotado, existe $(A^{-1})^*$, y, por tanto

$$\begin{aligned}\langle y, (A^{-1})^*A^*x\rangle &= \langle A^{-1}y, A^*x\rangle = \langle AA^{-1}y, x\rangle = \langle y, x\rangle \\ &= \langle A^{-1}Ay, x\rangle = \langle Ay, (A^{-1})^*x\rangle = \langle y, A^*(A^{-1})^*x\rangle,\end{aligned}$$

de donde, usando la propiedad 4. del ejercicio 5.1.2 se sigue que $(A^{-1})^*A^*x = A^*(A^{-1})^*x$. Si A es autoadjunto, entonces $A = A^*$, luego $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$, luego A^{-1} es autoadjunto. ■

Problema 6.16 Prueba que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ es compacto y $\mathbb{H}$ es de dimensión infinita, entonces, si existe el inverso de A, A^{-1} no puede ser acotado.

Solución: Supongamos que A es invertible y su inversa A^{-1}, es acotada. Entonces, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Pero por el ejercicio 6.14 sabemos que si A es compacto entonces AA^{-1} y $A^{-1}A$ tienen que ser compactos, pero I, no es compacto cuando $\mathbb{H}$ es de dimensión infinita (ver ejercicio 6.4.3). ■

Problema 6.17 Prueba que A es compacto si y solo si A^*A es compacto.

Solución: Si A es compacto, A^* es compacto (por el teorema 6.4.10) luego su producto es compacto (basta con que A^* sea acotado, ver ejercicio 6.14). Supongamos que A^*A es compacto y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $(y_k)_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(A^*Ay_k)_k$ es convergente, y por tanto de Cauchy, i.e., si n, m, son lo suficientemente grandes, $\|A^*Ay_n - A^*Ay_m\| < \epsilon/2$. Entonces, si n, m son lo suficientemente grandes

$$\begin{aligned}\|Ay_n - Ay_m\|^2 &= \langle A(y_n - y_m), A(y_n - y_m)\rangle = \langle A^*A(y_n - y_m), y_n - y_m\rangle \\ &\leq \|A^*A(y_n - y_m)\|\|y_n - y_m\| \leq 2\|A^*A(y_n - y_m)\| \leq \epsilon,\end{aligned}$$

o sea, $(Ay_k)_k$ es de Cauchy, luego es convergente pues $\mathbb{H}$ es completo. ■

Problema 6.18 Prueba que si A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt, entonces es compacto. El recíproco no sea cierto. Encuentra un ejemplo de operador compacto que so sea de Hilbert-Schmidt.

Solución: Sea A un operador de tipo Hilbert-Schmidt y sea $(e_n)_n$ una base ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces, $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$. Definamos la sucesión de operadores $A_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$

$$A_k x = A_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\right) = \sum_{n=1}^{k}\langle x, e_n\rangle Ae_n.$$

Nótese que A_k es tal que $A_k x = Ax$ si $x \in \operatorname{span}(Ae_1, \ldots, Ae_k)$ y $A_k x = 0$ en otro caso, luego los operadores A_k son de rango finito pues $\dim \mathcal{I}(A_k) \leq k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Probemos que $A_k \to A$ cuando $k \to \infty$ en la norma de operadores, luego por el teorema 6.4.9, A es compacto. Tenemos que

$$Ax - A_k x = \sum_{n=k+1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n \quad \Rightarrow \quad \|(A - A_k)x\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|\|Ae_n\|.$$

Usando la desigualdad de Hölder (3.7.3) con $p = 2$,

$$\begin{aligned}\|(A - A_k)x\| &\leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|^2\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

donde, para la última desigualdad hemos usado la identidad de Parseval (5.2.6). Luego, tomado el supremo en $\|x\| = 1$ obtenemos

$$\|A - A_k\| \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad k \to \infty,$$

pues $\sum_{n=k+1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ es la cola de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ ya que A es un operador de tipo Hilbert-Schmidt.

Sea el operador $T : \ell^2 \mapsto \ell^2$ definido en el 6.2.9. Si $\mu_n \to 0$, T es compacto (véase el problema 6.19). Sea la sucesión $(\mu_n)_n$, $\mu_n = 1/\sqrt{n} \to 0$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T\phi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, T no puede ser de tipo Hilbert-Schmidt. ■

Problema 6.19 Prueba que el operador T definido en el ejemplo 6.2.9 es compacto si y solo si $\mu_n \to 0$.

Solución: Sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal de $\mathbb{H}$ completa de $\mathbb{H}$. Si T es compacto, entonces por el teorema 6.5.10, $T\phi_n \to 0$, luego, como $T\phi_n = \mu_n\phi_n$, $\mu_n \to 0$.

Supongamos ahora que $\mu_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, podemos definir una sucesión T_k de operadores de rango finito, y por tanto compactos (véase ejercicio 6.4.8), similar a la usada en el ejemplo 6.18, i.e.,

$$T_k x = T_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \right) = \sum_{n=1}^{k} \langle x, \phi_n \rangle T\phi_n = \sum_{n=1}^{k} \mu_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|(T - T_k)x\|^2 &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\mu_k|^2 |\langle x, \phi_n \rangle|^2 \leq \left(\sup_{n>k} |\mu_n|^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \left(\sup_{n>k} |\mu_n|^2 \right) \|x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|T - T_k\| \leq \left(\sup_{n>k} |\mu_n|^2 \right). \end{aligned}$$

Pero como $\mu_n \to 0$, entonces $\sup_{n>k} |\mu_n|^2 \to 0$, de donde, por el teorema 6.4.9, se deduce el resultado. ■

Problema 6.20 Prueba que el operador $T : L^2([0,1]) \mapsto L^2([0,1])$, definido en el problema (6.1), es compacto si se cumple la condición (6.6.3). **Ayuda:** Usa los problemas 6.5 y 6.18.

Problema 6.21 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert un operador autoadjunto. Prueba que si $\langle Ax, x\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = \Theta$, es el operador nulo, incluso en el caso de que $\mathbb{H}$ sea un espacio de Hilbert real.

Solución: Si $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces del lema 6.2.1 se deduce el resultado. Supongamos que $\mathbb{H}$ es real. Entonces, para todos $x, y \in \mathbb{H}$, tenemos, definiendo el vector $v = x + y$, que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Av, v\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle A^*x, y\rangle = 2\langle Ax, y\rangle. \end{aligned}$$

Luego, por la propiedad 4. del ejercicio 5.1.2 tenemos que $Ax = 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, luego A es el operador nulo $A = \Theta$. ■

Problema 6.22 Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert es normal si y solo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.

Solución: En efecto, si T es normal $TT^* = T^*T$, luego, para todo $x \in \mathbb{H}$.

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

De lo anterior se sigue que si $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Pero el operador $A = (T^*T - TT^*)^* = (T^*T)^* - (TT^*)^* = T^*T - TT^* = A$, es autoadjunto, luego el problema 6.21 implica $A = \Theta$, de donde se sigue que $T^*T = TT^*$, i.e., T es normal. ■

Problema 6.23 Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, es normal si y solo si los operadores autoadjuntos A y B de su forma cartesiana (6.6.4) conmutan, i.e., $AB = BA$.

Solución: Usando (6.6.4) tenemos

$$TT^* = A^2 + B^2 + i(BA - AB), \quad T^*T = A^2 + B^2 - i(BA - AB) \quad \Rightarrow$$

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB).$$

Luego, si T es normal $TT^* = T^*T$ por tanto $AB = BA$, y si $AB = BA$, entonces $TT^* = T^*T$. ■

Problema 6.24 Prueba que si $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, es normal, entonces $\|T^n\| = \|T\|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Está claro que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ (ver problema 4.13). Probemos que $\|T^n\| \geq \|T\|^n$, de donde se seguiría el resultado. Para ello probaremos que $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$, para todo $x \in \mathbb{H}$ con $\|x\| = 1$. Como el operador T es acotado, T^* lo es y por tanto T^*T también. Nótese que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| = \|T^*(Tx)\| = \|T^2x\|,$$

donde hemos usado que $\|x\| = 1$ y además que como T es normal, entonces $\|Ty\| = \|T^*y\|$ para todo y (ver problema 6.22). Está claro de lo anterior que $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ para $n = 1, 2$. Supongamos que es cierto para $n = m$, i.e., $\|T^m x\| \geq \|Tx\|^m$, y probémoslo para $n = m + 1$. Supongamos que $Tx \neq 0$, pues en caso contrario sería trivial ($T = \Theta$). Para todo $x \in \mathbb{H}$, $Tx \neq 0$, definamos el vector $y = Tx/\|Tx\| \in \mathbb{H}$, $\|y\| = 1$. Tenemos, usando la hipótesis de inducción $\|T^m y\| \geq \|Ty\|^m$, que

$$\begin{aligned}\|T^{m+1}x\| &= \|Tx\|\|T^m y\| \geq \|Tx\|\|Ty\|^m = \|Tx\|^{1-m}\|T^2\|^m \geq \|Tx\|^{1-m}\|Tx\|^{2m} \\ &= \|Tx\|^{m+1},\end{aligned}$$

de donde se sigue, pues $\|x\| = 1$, que $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$, y, por tanto $\|T^n x\| = \|Tx\|^n$. ■

Problema 6.25 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, y sea λ un autovalor del mismo. Prueba que si A es positivo, entonces $\lambda \geq 0$ y si A es unitario entonces $|\lambda| = 1$.

Solución: Si A es positivo, entonces $0 \leq \langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|$, luego $\lambda \geq 0$. Si U es unitario, $\|x\|^2 = \|Ux\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2$, de donde se sigue el resultado. ■

Problema 6.26 Prueba que un operador lineal acotado es de proyección (ver problema 5.11) si y solo si es autoadjunto e idempotente.

Solución: Si P es de proyección sobre un cerrado $M \subset \mathbb{H}$, P es lineal, acotado e idempotente (ver problema 5.11). Probemos que P es autoadjunto. Para ello notemos que por definición, si $x \in \mathbb{H}$ entonces, $x = y + y^\perp$, con $y \in M$, $y^\perp \in M^\perp$, $Px = y$, y si $z \in \mathbb{H}$, $z = w + w^\perp$, $w \in M$, $w^\perp M^\perp$, $Pz = w$. Entonces, para todos $x, z \in \mathbb{H}$,

$$\langle Px, z - Pz\rangle = \langle y, w^\perp\rangle = 0, \quad \text{pues } y \in M,\ w^\perp \in M^\perp.$$

Probemos que $P = P^*$. Para ello notamos que

$$\langle Px, z\rangle = \langle Px, Pz\rangle + \underbrace{\langle Px, z - Pz\rangle}_{=0} = \langle Px, Pz\rangle + \underbrace{\langle x - Px, Pz\rangle}_{=0} = \langle x, Pz\rangle.$$

Supongamos que $P : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es autoadjunto e idempotente. Definamos el conjunto $M = \{x \in \mathbb{H} : Tx = x\}$. Está claro que M es no vacío ($x = 0 \in M$). Como P es acotado, entonces P es continuo, así que si $x_n \to x$, se tiene $Px_n \to Px$. Sean $(x_n)_n \in M$. Entonces $x_n = Px_n \to Px = x$, luego $x \in M$, luego M es cerrado. Ahora bien, $Px \in M$, pues $P^2x = P(Px) = Px$ (es idempotente), luego $Py = y$, $y = Tx \in M$. Probemos que $x - Px \in M^\perp$, luego para todo $x \in \mathbb{H}$ tendremos que $x = y + y^\perp$, $y = Px \in M$ y $y^\perp \in M^\perp$, i.e., P es de proyección sobre el espacio M. Sea $z \in M$ cualquiera. Entonces

$$\langle x - Px, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle Px, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, Pz\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle = 0,$$

pues P es autoadjunto y $Pz = z$, por construcción. ■

Problema 6.27 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto. Prueba que si para cierto $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \Theta$ (operador nulo), entonces A es el operador nulo. **Ayuda:** Prueba que A^k es autoadjunto y compacto y usa el Teorema espectral 6.5.13 para probar que todos autovalores de A^k son cero, de donde se deduce, de nuevo usando el teorema espectral que $A = \Theta$.

Solución: Que A^k es autoadjunto se deduce de la proposición 6.2.4 y que es compacto del problema 6.14. Como $A^k = \Theta$, entonces los autovalores μ_n de A^k son los mismos de Θ, pero para Θ obviamente la ecuación $\Theta x = 0 = \mu_n x$ tiene como única solución $\mu_n = 0$ para todo $x \neq 0$ de $\mathbb{H}$. Pero entonces, usando (6.5.2)

$$A^k x = \sum_n \mu_n \langle x, x_n\rangle x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A^k = \Theta.$$

Sean λ_n los autovalores de A, entonces $\mu_n = \lambda_n^k$, luego los autovalores de A sin todos nulos y usando nuevamente (6.5.2) obtenemos que $A = 0$. ■

Problema 6.28 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto y sea P_n el operador del proyección al subespacio de los autovectores asociados al autovalor λ_n. Prueba que para todo n, $AP_n = \lambda_n P_n$. Usando lo anterior prueba que para $k = 1, 2, \ldots$, $A^k x = \sum_n \lambda_n^k P_n x$ para todo $x \in \mathbb{H}$. De hecho se tiene que $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n$

Solución: Basta notar que,

$$A^2x = A(Ax) = A\left(\sum_n \lambda_n\langle x, x_n\rangle x_n\right) = \sum_n \lambda_n\langle x, x_n\rangle Ax_n = \sum_n \lambda_n^2\langle x, x_n\rangle x_n$$

donde hemos usado la fórmula (6.5.2), la continuidad de A y que $Ax_n = \lambda_n x_n$. El resto se hace de forma análoga mediante inducción. La convergencia en norma de operadores se demuestra de forma análoga a como se hizo para demostrar (6.5.6). Esta claro además que todos los operadores A^k son autoadjuntos y compactos (¿por qué?). ■

Problema 6.29 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto y sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función real tal que $f(\lambda) \to 0$ si $\lambda \to 0$, $f(0) = 0$. En estas condiciones definiremos la función $f(A)$ de la siguiente forma

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)P_n, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{6.6.5}$$

Prueba que el operador $f(A)$ está bien definido y que es lineal, autoadjunto y compacto. Como aplicación encuentra el operador $\sqrt{A}$ de un operador compacto y definido positivo A.

Solución: Probar que $f(A)$ está bien definido es casi igual que la prueba de la fórmula (6.5.6), i.e., hay que probar que la sucesión de sumas parciales $f_k(A) = \sum_{n=1}^{k} f(\lambda_n)P_n$ es de Cauchy. Así

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=m+1}^{k} f(\lambda_n)P_n x\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=m+1}^{k} f(\lambda_n)P_n x, \sum_{i=m+1}^{k} f(\lambda_n)P_i x\right\rangle \\ &= \sum_{n=m+1}^{k} f(\lambda_n)^2|\langle x, x_n|^2 \le f(\lambda_{m+1})^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

Como $\lambda_m \to 0$, y $f(\lambda_m) \to 0$ entonces si tomamos m suficientemente grande podemos hacer $f(\lambda_m)^2 < \epsilon^2$, cualquiera sea $\epsilon > 0$. Luego $\left\|\sum_{n=m+1}^{k} f(\lambda_n)P_n\right\| < \epsilon$, i.e., $\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n)P_n$ es de Cauchy, luego es convergente $N \to \infty$ en la norma de operadores. La linealidad se sigue de la linealidad de los operadores $f_k(A)$.

Probar que es autoadjunto es inmediato:

$$\begin{aligned}\langle f(A)x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle f(\lambda_n)P_n x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle P_n x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle x, P_n y\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f(\lambda_n)P_n y\rangle = \langle x, f(A)y\rangle.\end{aligned}$$

Como los P_n son compactos (ver ejemplo 6.4.7), entonces los operadores $f_k(A) = \sum_{n=1}^{k} f(\lambda_n)P_n$, son compactos para cada k, y como vimos $f_k(A) \to f(A)$, luego el teorema 6.4.9 implica que $f(A)$ es compacto.

Sea ahora A positivo. Entonces por (6.5.2) y (6.5.8)

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle x, x_n\rangle|^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. Entonces $f(\lambda) \to 0$ si $\lambda \to 0$, $f(0) = 0$, luego podemos definir la función A^α, para todo $\alpha > 0$

$$A^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha P_n.$$

Sea $\alpha = 1/2$. Entonces, usando los resultados del problema 6.28 tenemos $A^2 = \sum_n \lambda_n^2 P_n$, luego

$$(\sqrt{A})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{1/2})^2 P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n = A.$$

■

Problema 6.30 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal tal que se tiene una descomposición espectral de la forma (6.5.2)

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n,$$

donde $(x_n)_n$ es una sucesión ortonormal de vectores de $\mathbb{H}$, $(\lambda_n)_n$ es una sucesión numérica (no necesariamente real) acotada. Si $y \in \mathcal{I}(A)$, entonces una solución de la ecuación $Ax = y$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, x_n\rangle x_n$.

Solución: Como $y \in \mathcal{I}(A)$, existe $z \in \mathbb{H}$ tal que $y = Az$. Entonces

$$\langle y, x_n\rangle = \langle Az, x_n\rangle = \left\langle \sum_j \lambda_j \langle z, x_j\rangle x_j, x_n \right\rangle = \lambda_n \langle z, x_n\rangle \quad \Rightarrow$$

la serie $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, x_n\rangle x_n$ es convergente. En efecto, las sumas parciales de dicha serie $X_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^{-1} \langle y, x_n\rangle x_n$ son de Cauchy, pues si elegimos j suficientemente grande

$$\|X_m - X_j\|^2 = \sum_{n=j+1}^{m} \lambda_n^{-2} |\langle y, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=j+1}^{m} |\langle z, x_n\rangle|^2 < \epsilon^2,$$

pues la sucesión $\langle z, x_n\rangle$ es de ℓ^2 (¿por qué). Como $\mathbb{H}$ es completo entonces X_n es convergente. Como $(\lambda_n)_n$ es acotada, entonces A es acotado, por tanto continuo. Entonces, como $Ax_n = \lambda_n x_n$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}\langle y, x_n\rangle Ax_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y, x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle z, x_n\rangle x_n = Az = y,$$

de donde se deduce el resultado. ■

Bibliografía

Se recomienda para el tema de espacios métricos, normados y de Hilbert los libros marcados con "m", "n" y "h", respectivamente.

[1] S.K. Berberian. *Introduction to Hilbert space.* AMS Chelsea Publishing, 1999.^{h}

[2] R.P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Mathematical Association of America, Washington D.C., 1997.^{m}

[3] L. Debnath y P. Mikusinsk. *Introduction to Hilbert spaces with applications.* Elsevier, 2005.^{h}

[4] Y. Eidelman, V.D. Milman, A. Tsolomitis. *Functional Analysis: An Introduction*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 66, AMS, RI, 2004.^{m,h}

[5] A.N. Kolmogorov y A.V. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial MIR, Moscú, 1978. (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover, 1999).^{m,h}

[6] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library Edition, New York, 1989.^{m,n}

[7] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods.* Wiley, New York, 1969.^{n,h}

[8] K. Saxe. *Beginning Functional Analysis.* Springer, New York, 2002.^{n,h}

[9] M. Schechter. *Principles of functional analysis.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 36, AMS, RI, 2002.^{b,h}

[10] J. Tinsley Oden y L.F. Demkowicz. *Applied Functional Analysis.* CRC Press, BR, 2018.^{m,n}

[11] N. Young. *An introduction to Hilbert Space.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.^{n,h}

[12] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin, 2015.

[13] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis II.* Springer-Verlag, Berlin, 2016.