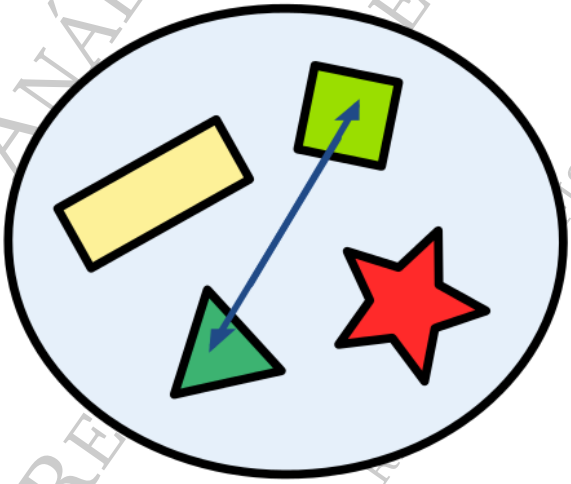
Resumen de Análisis Funcional

Prof. Renato Álvarez Nodarse

WWW: `https://renato.ryn-fismat.es`



$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Versión del 25/04/2024

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos del análisis necesarios para entender el resto de los capítulos del estas notas. Asumiremos que el lector tiene unos conocimientos mínimos del cálculo infinitesimal, el álgebra lineal, nociones básicas sobre los números complejos. Para más detalles consultar, por ejemplo, [12, 13].

1.1. Sucesiones numéricas en $\mathbb{C}$

Definición 1.1.1 *La aplicación o función $f : \mathbb{N} \mapsto A$ que hace corresponder a cada número natural n un elemento a_n de cierto conjunto A se denomina sucesión de elementos de A y la denotaremos por $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, o $(a_n)_n$.*

Por ejemplo, si $A = \mathbb{C}$, diremos que $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$ define una sucesión de números complejos. Como ejemplo tenemos

$$x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}, \quad z_n = e^{in} = \{e^i, e^{2i}, e^{3i}, \dots\}, \quad \dots$$

Definición 1.1.2 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ está acotada, si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$.*

Por ejemplo, las sucesiones (x_n) y $(z_n)_n$ definidas antes son claramente acotadas (basta escoger $M = 1$).

Definición 1.1.3 *Se dice que una sucesión $(z_n)_n$ es no acotada si $\forall M \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > M$.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada.

Definiremos la distancia $d(z_1, z_2)$ entre dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.1.1}$$

Definiremos el ϵ-entorno o ϵ-vecindad de un número complejo z_0 a la "bola" $U_\epsilon(z_0)$ definida por

$$U_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Obviamente $U_\epsilon(z_0)$ es un círculo del plano complejo de centro z_0 y radio ϵ excluyendo la frontera (o sea, la correspondiente circunferencia).

Sea $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que

$$\text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \leq |z - z_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0|, \qquad |z + z_0| \leq |z| + |z_0|,$$

podemos construir la teoría de límites en $\mathbb{C}$ de la misma forma que se hace en $\mathbb{R}$. Así pues, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.4 *Diremos una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ tiene límite z, y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, si*[1]

$$\forall \epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N, \quad |z_n - z| < \epsilon.$$

El significado geométrico del límite es claro: dentro de ϵ-entorno $U_\epsilon(z)$ del límite z de la sucesión $(z_n)_n$ hay infinitos términos de la sucesión (de hecho todos a partir de cierto N) y fuera de él sólo hay un número finito de términos (a lo sumo los N primeros términos) de la misma.

Si escribimos $z_n = x_n + iy_n$ y $z = x + iy$, entonces, de las desigualdades

$$\text{máx}\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

En particular, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si y sólo si $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

[1] En adelante al escribir $a > 0$ asumiremos que a es un número real, ya que los complejos no se pueden ordenar.

Nota 1.1.5 *De lo anterior se deduce que toda sucesión de números complejos es equivalente a dos sucesiones de números reales (la de sus partes reales e imaginarias).*

Así pues, por analogía con el caso real podemos definir las sucesiones de Cauchy, enunciar y probar el criterio de Cauchy y muchas otras propiedades de las las sucesiones[2]. No obstante al ser $\mathbb{C}$ un cuerpo **no** ordenado, se pierden todas las propiedades relacionadas con el orden (supremo, monotonía, etc). Gracias a la teoría de límites de sucesiones podemos definir el límite de funciones, continuidad de funciones, derivabilidad de funciones, etc.

Además, está claro que, al igual que en el caso real, si $(z_n)_n$ tiene límite, entonces $(z_n)_n$ es acotada, pero no al contrario.

Definición 1.1.6 *Una sucesión $(z_n)_n$ es de Cauchy (o fundamental) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$, se cumple $|z_n - z_m| < \epsilon$. O, equivalentemente, z_n es de Cauchy si y solo si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tal que}\ \forall n > N,\ \textit{y}\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_{n+p} - z_n| < \epsilon,$$

o, equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tal que}\ \forall n > m > N, \quad |z_n - z_m| < \epsilon,$$

Teorema 1.1.7 (Criterio de Cauchy) *Para que una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ sea de convergente es necesario y suficiente que sea de Cauchy.*

De la equivalencia entre las sucesiones reales y complejas (ver Nota 1.1.5) se sigue inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema 1.1.8 (Propiedades algebraicas de los límites) *Sean dos sucesiones convergentes $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$.

[2]El lector no familiarizado con dichas definiciones puede consultar, por ejemplo, el capítulo 3 de la magnífica monografía [12]

3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n \neq 0$, *y* $b \neq 0$, *entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Definición 1.1.9 *Un punto z de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es interior si existe un entorno $U_\epsilon(z)$ del mismo contenido por completo en E. Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.*

Evidentemente todo entorno $U_\epsilon(z)$ de z es un abierto.

Definición 1.1.10 *Dado un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de E si el cualquier entorno $U_\epsilon(z_0)$ existe al menos un punto de E distinto de z_0 (y por tanto infinitos).*

Por ejemplo, 0 es un punto de acumulación del conjunto $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, mientras que 10^{-k}, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$ no lo es.

De la definición 1.1.10 se sigue inmediatamente el siguiente

Teorema 1.1.11 *z_0 es un punto de acumulación de E si y sólo si existe al menos una subsucesión de números $(z_n)_n$, con $z_n \neq z_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.*

Definición 1.1.12 *Un conjunto E es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Por ejemplo en conjunto $\overline{U}_\epsilon(z_0) =: \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq \epsilon\}$ es un cerrado.

Definición 1.1.13 *Un conjunto E es acotado si existe un $M > 0$ tal que, para todo $z \in E$, $|z| < M$.*

A partir de Lema del Bolzano-Weierstrass para los conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ se sigue el siguiente resultado:

Lema 1.1.14 (Bolzano-Weierstrass) *Cualquier subconjunto infinito*[3] *acotado de $\mathbb{C}$ tiene por lo menos un punto de acumulación.*

[3] Con un número infinito de elementos.

1.2. Series

1.2.1. Series numéricas

Definición 1.2.1 *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

se denomina serie infinita o serie y a los números a_1, a_2, ..., elementos de la serie. Las sumas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

se denominan sumas parciales de la serie.

Definición 1.2.2 *Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a S, si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ tiene límite finito S y a dicho número le denominaremos "suma" de la serie. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

El Criterio de Cauchy para las sucesiones establece que una sucesión $(x_n)_n$ es convergente si y sólo si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$ tal que si $n > N,$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ entonces $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$. Una simple aplicación del mismo a la sucesión de sumas parciales nos conduce a nuestro primer criterio de convergencia para las series.

Teorema 1.2.3 (Criterio de Cauchy para las series) *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si , para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n > N$ y para todo $p \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$*

Este teorema tiene dos consecuencias inmediatas: la primera es que si alteramos un número finito de elementos de la serie, la convergencia de ésta no se afecta; y la segunda es el siguiente resultado:

Teorema 1.2.4 (Condición necesaria de convergencia de una serie) *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Es *fácil* ver, a partir del teorema anterior que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{300n + n^2}$ es divergente. Con algo de más trabajo se puede probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es divergente, lo cual ilustra que las condiciones del teorema 1.2.4 son necesarias pero no suficientes.

Una propiedad de las series convergentes es que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k$ también es convergente, además

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Nótese, además, que del carácter convergente de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ no se puede inferir el carácter convergente o divergente de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (¿por qué?).

Definición 1.2.5 *Diremos que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente.*

Teorema 1.2.6 (Weierstrass) *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente si y sólo si la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ está acotada.*

A partir del criterio de Cauchy 1.2.3 se sigue el siguiente teorema:

Teorema 1.2.7 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Un ejemplo sencillo, y de gran importancia, de serie absolutamente convergente es la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Recordemos a continuación algunos criterios para estudiar la convergencia de series. El primero, y uno de los más sencillos, es el criterio de comparación. Su demostración es una simple consecuencia del teorema de las sucesiones monótonas y acotadas similar a la prueba del teorema 1.2.6.

Teorema 1.2.8 (Criterio de Comparación de Weierstrass) *Sean las series de números complejos* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. *Si existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$, $|a_n| \leq |b_n|$, *entonces si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *converge, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ *converge, y si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *diverge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *diverge.*

Ejercicio 1.2.9 Prueba, calculando el límite de sus sumas parciales, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Usando lo anterior y el criterio de comparación deduce la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorema 1.2.10 (Criterio de comparación por paso al límite) *Sean las sucesiones* $(a_n)_n$ *y* $(b_n)_n$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q > 0$. *Entonces,* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge si y sólo si* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *converge.*

Ejercicio 1.2.11 Estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Nota: De la prueba del Criterio de comparación por paso al límite se deduce que si $q = 0$, sólo podemos afirmar lo mismo que en el teorema de comparación es decir, que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| <$ converge, y si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ diverge.

Veamos ahora dos criterios donde se involucra una única serie, es decir sólo precisamos la información relacionada con la serie que queremos estudiar.

Teorema 1.2.12 (Criterio del cociente de D'Alembert) *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de números complejos tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q$. *Entonces,*

1. *Si* $q < 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente*
2. *Si* $q > 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es divergente.*
3. *Si* $q = 1$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *puede ser convergente o divergente.*

Este criterio no siempre funciona aún en casos sencillos como el siguiente: sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$. Obviamente tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/6 & n \text{ par} \\ 3/2 & n \text{ impar} \end{cases},$$

luego no existe el límite del cociente. No obstante,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

y estas dos últimas obviamente son convergentes.

Teorema 1.2.13 (Criterio de la raíz de Cauchy) *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de números complejos tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Entonces,*

1. *Si $q < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente*
2. *Si $q > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.*
3. *Si $q = 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ puede ser convergente o divergente.*

Si aplicamos este criterio a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^k}$ tenemos

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{-1+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{2},$$

por tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ y según el criterio de Cauchy 1.2.13 converge.

El ejemplo anterior nos indica que el criterio de Cauchy es más general que el de D'Alembert en el sentido que el criterio de criterio de D'Alembert implica en de Cauchy, pero no viceversa.

Nota 1.2.14 *Debemos destacar que tanto en el criterio de D'Alembert como el de Cauchy antes descritos, el resultado sigue siendo cierto si cambiamos los límites por los límites superiores.*

Ejercicio 1.2.15 Estudia el carácter de las series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

1.2.2. Más sobre series de números reales

Vamos a discutir ahora algunas propiedades de las series de números reales. Comenzaremos considerando serie de gran importancia en las matemáticas –y fuera de ellas–: las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Estas series se conocen como series armónicas. Ya vimos ejemplos de ellas cuando $p = 1$, serie que divergía, y $p = 2$, serie que convergía. Una pregunta evidente es ¿Para cuáles $p > 0$ converge la serie armónica?

Es evidente del teorema de comparación que para todo $p > 2$ la serie converge y que para $p < 1$ diverge. Ahora bien, para $1 < p < 2$ no nos sirve el teorema de comparación y un calculo sencillo nos muestra que tanto el criterio de Cauchy como el de D'Alembert nos dan 1 con lo cual no son concluyentes. ¿Cómo resolver este problema?

Teorema 1.2.16 (Criterio de McLaurin-Cauchy) *Sea $f(x)$ una función real no negativa definida en $[1, +\infty)$ y monótona decreciente en todo su dominio. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tienen el mismo carácter de convergencia.*

Ejercicio 1.2.17 Estudiar el carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ y $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ para $p > 0$ usando el criterio integral.

Reordenación de términos en una serie

Dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, construyamos una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ obtenida de la anterior mediante la reordenación de un número infinito de términos, es decir todos los términos de las sucesiones $(a_n)_n$ y $(a'_n)_n$ coinciden pero están, en general, situados en distintos sitios.

Teorema 1.2.18 *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ también es absolutamente convergente y su suma coincide con la de la serie original.*

Este resultado sólo es cierto para las series absolutamente convergentes. Veamos el siguiente ejemplo.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Esta serie es convergente (probar como ejercicio), pero no lo hace absolutamente. Además, como

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{1+\xi} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{con} \quad \xi \in (0, x),$$

tenemos, sustituyendo $x = 1$, que

$$\left| \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

es decir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots = \log 2 \neq 0.$$

Reordenemos la serie

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S' &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots\right] \\ &= \frac{S}{2} = \frac{\log 2}{2}, \end{aligned}$$

es decir ¡nuestra reordenación cambia el valor de la serie!

Definición 1.2.19 *Diremos que una serie es condicionalmente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.*

Teorema 1.2.20 (Teorema de reordenación de Riemann) *Las series condicionalmente convergentes se pueden reordenar de tal forma que sumen cualquier valor real prefijado de antemano.*

1.2.3. Series de potencias

Las definiciones y teoremas anteriores nos permiten definir y estudiar las series de potencias en $\mathbb{C}$.

Definición 1.2.21 *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_n$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ definiremos serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.2.1}$$

que denominaremos serie de potencias.

Como casos especiales de las series de potencias tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

etc. Si la serie converge para todos los valores de z de cierto conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces podemos definir la función suma $f(z)$ de la serie.

Propiedades de las series de potencias

Sin pérdida de generalidad vamos a considerar las series de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.2.2}$$

es decir, cuando $z_0 = 0$. Obviamente si tenemos una serie de potencias del tipo (1.2.1), la podemos reducir a la anterior (1.2.2) haciendo el cambio de variables $\zeta = z - z_0$ y viceversa.

Teorema 1.2.22 (Primer Teorema de Abel) *Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n, z \in \mathbb{C}$. Si la serie converge para cierto $w \in \mathbb{C}$, entonces la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |w|$.*

Corolario 1.2.23 *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para algún número complejo w, entonces diverge para todo z con $|z| > |w|$.*

Por tanto, el teorema de Abel nos asegura la existencia de regiones (círculos) de convergencia y divergencia, de una serie de potencias en $\mathbb{C}$. De hecho podemos afirmar que dada una serie de potencias cualquiera siempre existe un número no negativo $R \geq 0$ ó $R = +\infty$ tal que para todo z con $|z| < R$ la serie converge y si $|z| > R$ la serie diverge.

Definición 1.2.24 *El número $R \geq 0$ anterior se denomina radio de convergencia de una serie de potencias.*

Nota 1.2.25 *De lo anterior se deduce que la región de convergencia de una serie de potencias es un círculo en el plano complejo que, en el caso de las series de la forma (1.2.2) está centrado en el origen y en el de las series (1.2.1), en z_0 (ver la figura 1.1). Nótese que se puede obtener una región de la otra simplemente mediante una traslación (mediante el vector z_0) en el plano complejo.*

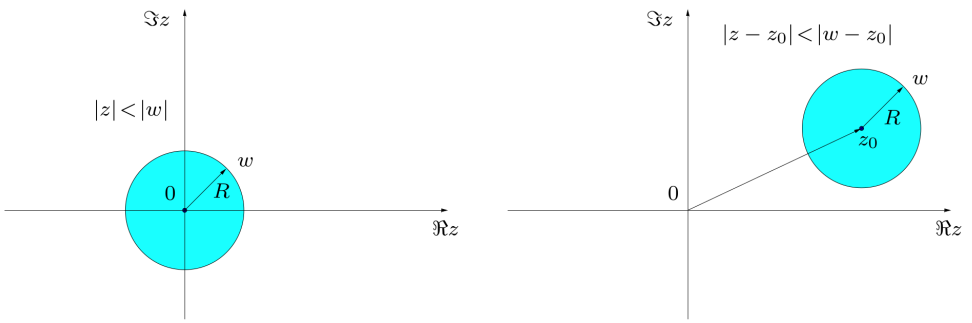


Figura 1.1: Región de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (izquierda) y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (derecha).

Teorema 1.2.26 (Segundo Teorema de Abel) *Toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, tiene radio de convergencia $R \geq 0$ ó $R = +\infty$. Además, la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < R$.*

Nota 1.2.27 *Del teorema anterior se sigue que la mayor región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es el disco $U_R(0)$.*

Ejercicio 1.2.28 *Estudiar la convergencia de las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Veamos ahora un criterio general para encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias. Como corolario del criterio de Cauchy para las series tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.29 (Fórmula de Cauchy-Hadamard) *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, su radio de convergencia R viene dado por la fórmula*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.2.3}$$

En particular, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, entonces $R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, entonces (ver el criterio de D'Alembert) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Ejercicio 1.2.30 *Repetir el estudio para las series del ejemplo 1.2.28.*

Ejercicio 1.2.31 *Calcular el radio de convergencia para las series de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}.$$

Nótese que las series anteriores son tales que no todos los coeficientes a_n son distintos de cero. De hecho solo aparecen los pares o los impares.

Teorema 1.2.32 *Sea una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces*

1. *Para todo $k \geq 1$ la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}, \tag{1.2.4}$$

tiene radio de convergencia R.

2. *La función $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$ y la k-ésima derivada de f, $f^{(k)}(z)$, viene dada por la serie (1.2.4).*

3. *Para todo $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.*

Como consecuencia del teorema anterior se sigue que si $f(z)$ admite una serie de potencias, $f(z)$ es infinitamente diferenciable en $U_R(0)$, y cada una de las funciones $f^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, es continua en $U_R(0)$. Del tercer apartado se tiene además que la serie de potencias de una función dada coincide con la correspondiente serie de Taylor.

Ejercicio 1.2.33 *Prueba que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k/k!$ es infinitamente diferenciable y que $f'(z) = f(z)$, es decir, $f(z) = e^z$.*

1.2.4. Analiticidad de las funciones reales

Una de las principales diferencias entre las funciones complejas de variable compleja y las funciones reales de variable real está precisamente relacionada con la diferenciación y analiticidad. En el análisis real se dice que una función $f(x)$ es analítica en un entorno de un punto z_0 si en dicho entorno $f(x)$ se puede escribir como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con radio de convergencia $R > 0$. Una propiedad muy importante de las series de potencias (reales o complejas) es que son infinitamente diferenciables. ¿Será cierto el recíproco? ¿Toda función C_A^∞ será analítica en algún entorno de $x_0 \in A$?

La respuesta a esta pregunta la dio Cauchy, en 1821. Definamos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es infinitas veces derivable en $x = 0$ (de hecho en todo $\mathbb{R}$) además $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego su serie de Taylor en $x = 0$ es 0 y por tanto $f(x)$ no admite una serie de potencias en cero (o lo que es lo mismo, el radio de convergencia de la correspondiente serie es 0), i.e., la función de Cauchy no es analítica en $x_0 = 0$.

Teorema 1.2.34 (Condición necesaria y suficiente de analiticidad) *Una función $f(x)$ infinitamente derivable en todo un entorno de $x = x_0$ es analítica si y solo si el resto de Taylor*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - x_0)^k,$$

tienda a cero para todo x de dicho entorno.

El caso complejo es mucho más *sencillo*. De hecho se tiene el siguiente sorprendente resultado cuya demostración omitiremos (ver por ejemplo *A.I. Markushevich. Teoría de las funciones analíticas*):

Teorema 1.2.35 (Goursat) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (abierto y conexo) y sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función diferenciable (holomorfa). Entonces, para cada punto $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ admite una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$.*

1.3. Continuidad uniforme

1.3.1. Definición de continuidad uniforme

Recordemos la definición de continuidad de una función en un conjunto $A \in \mathrm{Dom}\,(f)$.

Definición 1.3.1 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es continua en A si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall a \in A,\ \exists \delta := \delta(a, \epsilon) > 0;\ \textit{tal que si}\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Hemos de destacar que en la definición anterior δ depende, en general, no sólo de ϵ sino también del punto a. Veamos un ejemplo.

Sea $f(x) = 1/x$ en $(0, 1]$. f es continua, de hecho lo será en cualquier intervalo que no contenga al cero. Para probarlo usamos la definición. Puesto que

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{x - a}{x\,a}\right| = \frac{1}{|x\,a|}|x - a|.$$

Si $a > 0$ entonces podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty)$, $1/|x\,a| < M$, de hecho, M es más grande a medida que a se

acerque más a cero. En efecto, puesto que $1/x$ es decreciente tenemos que si $a \neq 0$ siempre podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ (basta elegirlo menor que $a/2$) tal que $1/x \leq 1/(a/2) = 2/a$. Es decir,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2}{a^2}|x - a|, \qquad \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty).$$

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, entonces si x es tal que $0 < |x - a| < \delta = \frac{a^2}{2}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. En la figura 1.2 se muestra lo que ocurre.

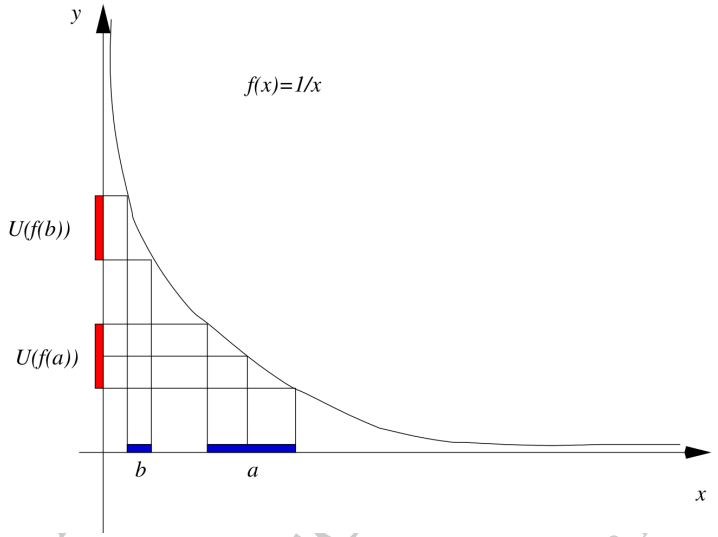


Figura 1.2: La función $f(x) = 1/x$, y la continuidad uniforme.

Si prefijamos un $\epsilon > 0$ tenemos los dos entornos $U(f(a))$ y $U(f(b))$ con $b < a$. Obviamente a medida que nos acercamos a cero el correspondiente entorno de a, $U(a)$ se hace cada vez más pequeño además la longitud del mismo, como hemos visto es igual a $d = \frac{a^2}{2}\epsilon$, así que si $a \to 0$, $d \to 0$.

No ocurre lo mismo si escogemos, por ejemplo, en intervalo $[\alpha, 1]$ cualquiera sea $\alpha \in (0, 1)$. En efecto, en este caso, nuestra desigualdad será

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2}{a^2}|x - a| < \frac{2}{\alpha^2}|x - a|, \quad \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset (0, \infty).$$

Es decir que cualquiera sea $\epsilon > 0$, entonces si x es tal que $0 < |x - a| < \delta = \frac{\alpha^2}{2}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, o sea, ¡nuestro δ en este caso no depende del punto a!, o sea, el mismo δ nos vale para todo el intervalo.

Otro tanto le ocurre a la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \infty)$. Para $a > 0$ calculemos[4]

$$|f(x) - f(a)| = (x + a)|x - a| < (2a + \delta_1)|x - a|, \quad \text{si} \quad x \in (a - \delta_1, a + \delta_1).$$

Sea $\delta_1 = 1$, por ejemplo. Entonces, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si x es tal que $|x - a| < \delta = \frac{1}{2a+1}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, es decir, que a medida que a aumenta δ disminuye. Nuevamente no podemos obtener un δ válido para todo $a \geq 0$. Que ocurre si escogemos el intervalo $[0, b]$, $b < \infty$. Entonces,

$$|f(x) - f(a)| = (x + a)|x - a| < (2b)|x - a|, \qquad \forall x \in [0, b],$$

luego, cualquiera sea $\epsilon > 0$, si x es tal que $|x - a| < \delta = \frac{1}{2b}\epsilon$ tenemos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, es decir nuevamente δ no depende del punto a, por tanto el mismo δ nos vale para toda el intervalo.

Definición 1.3.2 *Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es uniformemente continua en un intervalo $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos x e y de $[a, b]$, tales que $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Es decir, para cualquiera sea el punto x de $[a, b]$ que escojamos, $f(x)$ es continua y el δ en la definición anterior, a diferencia del de la definición de continuidad "estándar" 1.3.1 sólo depende de ϵ y no del punto, o equivalentemente, que si escogemos un $\epsilon > 0$ cualquiera y denotamos por $U(f)$ el ϵ-entorno de cualquier punto $y = f(x)$ de la imagen, entonces, existe un $\delta > 0$ tal que los correspondientes δ-entornos de x, $U(x)$ son tales que $f(U(x)) \subset U(f)$.

Es evidente que cualquier función uniformemente continua en $[a, b]$ es continua en dicho intervalo. Ahora bien, el recíproco, como hemos visto, no es cierto. Por tanto, es interesante tener teoremas que nos aseguren cuando una función es uniformemente continua y cuando no. Nótese que una función no es uniformemente continua en $A \subset \mathbb{R}$ si

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0 \exists x, a \in A; \quad |x - a| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Teorema 1.3.3 *Una función f* no *es uniformemente continua en A si existe un $\epsilon > 0$ y dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $|a_n - b_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tales que $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$.*

[4] Si $a = 0$ obviamente f es continua, además, las desigualdades también son válidas para $x \geq 0$.

Ejercicio 1.3.4 *Prueba que $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2$ no son uniformemente continuas en $(0, 1]$ y $[0, \infty)$, respectivamente, usando el teorema anterior.*

En el primer caso escogemos $a_n = 1/n$ y $b_n = 1/(n+1)$, $a_n - b_n = 1/(n(n+1)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero $|f(a_n) - f(b_n)| = 1$. Para el segundo caso escogemos $a_n = \sqrt{n+1}$ y $b_n = \sqrt{n}$, de forma que $a_n - b_n = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero $|g(a_n) - g(b_n)| = 1$.

El siguiente teorema nos da un criterio muy útil para saber cuando una función es uniformemente continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$:

Teorema 1.3.5 *(Heine)*[5] *Si la función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo $[a, b]$ entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

El teorema anterior nos indica que la función $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua en cualquier cerrado y acotado que no contenga al cero y que la función $g(x) = x^2$ es uniformemente continua en cualquier cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

De la de la definición de continuidad uniforme se sigue (basta escoger $\delta < \epsilon/K$) el siguiente:

Teorema 1.3.6 *(Condición suficiente de continuidad uniforme) Para que la función f sea uniformemente continua en A, es suficiente que exista una constante $K > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.*

Las funciones $f : A \mapsto \mathbb{R}$ que cumplen con que

$$\forall x, y \in A, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

se llaman *funciones de Lipschitz*. Así que el teorema anterior se puede parafrasear diciendo que toda función de Lipschitz es uniformemente continua.

Obviamente toda función de Lipschitz es continua, pero no viceversa, no toda función continua es de Lipschitz. Por ejemplo, $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$,

[5] Este teorema, a veces atribuido a Cantor, también es cierto para funciones de varias variables: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado (compacto) y sea la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$, continua en A. Entonces f es uniformemente continua en A.

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,1]$ (y por tanto uniformemente continua en $[0,1]$) pero no es de Lipschitz en $[0,1]$, pues

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}|x - y|,$$

y el factor $\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$ no es acotado en $[0,1]$.

1.3.2. Sucesiones y series de funciones reales

Definición 1.3.7 *La sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ tiene límite para cierto $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ si la sucesión numérica $(f_n(x_0))_n$ converge para dicho x_0. En este caso diremos que la sucesión converge puntualmente en x_0,*

Definición 1.3.8 *El conjunto $\mathbb{X}$ de todos los puntos $x \in \mathrm{Dom}\,(f_n)$ donde la sucesión $(f_n(x))_n$ converge se denomina conjunto de convergencia de la sucesión de funciones.*

Evidentemente para todo $x \in \mathbb{X}$, existe un único valor del límite de sucesión numérica $(f_n(x))_n$, por tanto podemos definir una función $f(x)$ sobre $\mathbb{X}$ que es la función límite de $f_n(x)$. Así tenemos la siguiente

Definición 1.3.9 *En el conjunto $\mathbb{X}$ de convergencia de la sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ la función $f(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{X}$ de la forma $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ se denomina función límite de $(f_n(x))_n$ y se dice que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge puntualmente a $f(x)$ en $\mathbb{X}$ y lo denotaremos como $f_n(x) \to f(x)$.*

Ejemplo 1.3.10 *Consideremos los siguientes ejemplos representativos.*

1. Definamos en $[0,\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la sucesión de funciones converge si y sólo si $x \in [0,1]$, además
$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$
es la función límite. Nótese que si escogemos $\mathbb{X} = [0,q]$, $0 \leq q < 1$, entonces $f(x) = 0$.

2. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. Es evidente que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

3. Sea $f_n(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Como en el ejemplo anterior $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0$.

4. Sea $f_n(x) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Evidentemente si $x = 0$ o $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ entonces $(1-x^2) < 1$, luego $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\mathbb{X} = [0,1]$ y $f(x) = 0$.

5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sea $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. Si $m!x \in \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 1$, si $m!z \notin \mathbb{Z}$, entonces $f_m(x) = 0$. Veamos el límite cuando $m \to \infty$ de $f_m(x)$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, $m!x \notin \mathbb{Z}$, por tanto $f_m(x) = 0$ y $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces a partir de cierto $m \in \mathbb{N}$, $m!x \in \mathbb{Z}$, por tanto, a partir de dicho m, $f_m(x) = 1$, luego $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 1$. Así, tenemos que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es la función de Dirichlet $D(x)$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} .$$

Nuestro objetivo fundamental es estudiar, no cuando las sucesiones funcionales convergen o no –pues eso ya lo hemos visto en temas anteriores pues para cada x la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión numérica– sino decidir en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. ¿Hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$? Los ejemplos anteriores sirven de ilustración a nuestro problema.

En el ejemplo 1 las funciones x^n son continuas en $[0,1]$ pero la función límite $f(x)$ no lo es. No ocurre lo mismo en el intervalo $\mathbb{X} = [0,q]$.

En el ejemplo 2 la función $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su función límite también, pero por ejemplo, la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ no tiene límite excepto cuando $n^2 x = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir la sucesión de derivadas no converge a la derivada de la función límite.

En el ejemplo 3, a diferencia del anterior la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ converge a cero que justamente es la derivada de la función límite. Es decir, en este ejemplo si que tenemos $f_n'(x) \to f'(x)$.

Analizando el ejemplo 4 vemos que la función $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ es integrable en $[0,1]$ y además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 2(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = 2(n+1)\left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1\right] = 1,$$

pero $\displaystyle\int f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, luego $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \not\to \int f(x)dx$.

A diferencia del caso anterior, podemos comprobar que en $[0,1]$ la función $f_m(x)$ del ejemplo 5 vale cero excepto un número finito de puntos, luego f_m es integrable y su integral vale cero, pero su función límite es una función no integrable (Riemann).

Finalmente, en el ejemplo 1 tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Todo lo anterior nos dice que dada una sucesión $f_n(x)$ con determinadas propiedades como la continuidad, derivabilidad, integrabilidad, la función límite puede o no tenerlas. Por tanto nuestro objetivo es claro. Encontrar condiciones bajo las cuales la función límite "herede" las propiedades de las funciones de la sucesión.

Definición 1.3.11 *Una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{X}$ si para todo $x_0 \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x_0, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ y lo denotaremos $f_n \to f$.*

Claramente vemos que, en general, nuestro N dependerá de x_0. Consideremos como ejemplo la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0,1)$. Obviamente $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1)$. Sea $0 < \epsilon < 1$ cualquiera y $x_0 \in [0,1)$. Entonces, tendremos $|f_n(x_0) - 0| = x_0^n < \epsilon$. Si escogemos N tal que $x_0^N < \epsilon$, o equivalentemente $N \log x_0 < \log \epsilon$, tendremos, como $\log x_0 < 0$ que, para todo $n > N = \log \epsilon / \log x_0$, $x_0^n < \epsilon$. Es decir que nuestra N depende explícitamente de x_0 y lo que es peor, a medida que x_0 se va acercando a 1, N claramente va tomando valores más grandes. La siguiente figura 1.3 aclara lo anterior.

En la figura 1.3 (izquierda) vemos la sucesión $f_n(x) = x^n$ dibujada en $[0,1)$. Las curvas son, de arriba hacia abajo, x, x^2, $\ldots x^N$. La linea horizontal representa a nuestro $\epsilon > 0$ y la vertical a nuestro x_0. Como vemos, dado

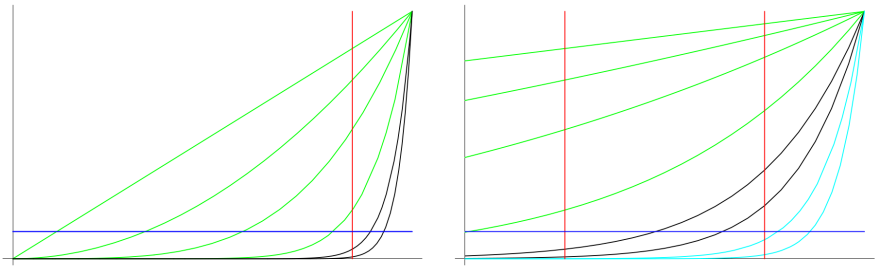


Figura 1.3: La sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1)$ (izq.) en $[q, 1)$ (der.)

el $\epsilon > 0$ de la figura, luego de varios N tenemos que x_0^N es menor que el $\epsilon > 0$ dado –ver la quinta gráfica de arriba abajo–. Veamos que ocurre más cerca del 1, para ello quedémonos sólo con un pequeño intervalo cercano al 1, digamos $[q, 1)$, estando q "suficientemente" cercano a 1. Aumentemos nuestro x_0 hasta hacerlo más próximo a 1 tal y como observamos en la figura de la derecha –la primera linea vertical era nuestro anterior x_0 y la segunda, más a la derecha es nuestro nuevo x_0–. Como vemos, ahora tenemos que aumentar nuestro N hasta llegar a la séptima curva. En ambos casos las primeras seis curvas son las misma.

A modo de ejemplo, tomaremos los valores numéricos. Numéricamente hemos escogidos los siguientes valores $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}85$ y el N necesario fue 20. En el segundo caso $\epsilon = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}95$ y el N necesario fue 50. Obviamente a medida que nos acercamos a 1 nuestro N crecerá tal y como hemos mostrado antes.

Una pregunta evidente es la siguiente. ¿Cualquiera sea una sucesión $f_n(x))_n$ siempre ocurrirá lo mismo. Para responderla consideremos el siguiente ejemplo: Sea la misma sucesión $f_n(x) = x^n$ pero en $[0, q]$ con $q \in (0, 1)$.

Hagamos un experimento numérico como el anterior usando como antes $\epsilon = 0{,}1$. En la figura 1.4 representaremos nuevamente mediante linea horizontal a nuestro $\epsilon > 0$, la primera linea vertical corresponderá a un x cualquiera en $[0, q]$ y la segunda linea vertical corresponderá a q, el extremo del intervalo. Dibujaremos la sucesión x^n para que se vea con más claridad el comportamiento de la misma. Obviamente $x \leq q$, así que escogeremos $q = 0{,}95$, por ejemplo. Un simple vistazo a la figura 1.4 nos permite ver que cualquiera sea el $x \leq q$ que escojamos, dado el $\epsilon > 0$

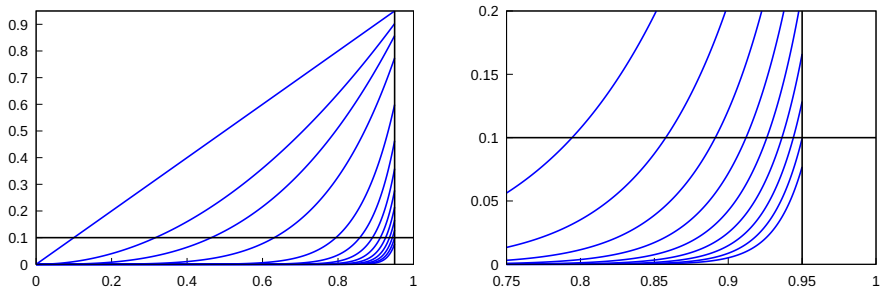


Figura 1.4: La sucesión $f_n(x) = x^n$, en $[0, q]$ (izq.) y una ampliación (der.)

tenemos un valor de N, que en nuestro caso corresponde a la séptima gráfica tal que $x^n < \epsilon$ para todo $n > N$ y ¡cualquiera sea la $x \in [0, q]$! Es decir podemos encontrar una N válida en todo punto de $[0, q]$. En realidad esto no es de extrañar pues para todo $\epsilon > 0$ si escogemos $N = \log \epsilon / \log q$, entonces tendremos $q^n < \epsilon$, por tanto para todo $x \in [0, q]$, y para todo $n > N$ tendremos $x^n \leq q^n < \epsilon$, es decir x^n tiende a 0 en todo $[0, q]$ y además lo hace *uniformemente* en todo el intervalo.

Lo anterior nos conduce de manera natural a la siguiente

Definición 1.3.12 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en un intervalo $I \in \mathbb{X}$, diremos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, y lo denotaremos $f_n \rightrightarrows f$.*

Gráficamente la convergencia uniforme está representada en la figura 1.5, gráfico de la izquierda. La función f está al centro y está localizada en el interior de cierto entorno de longitud ϵ. Cualquiera sea la $x \in I$, $f_n(x)$ debe estar contenida en el entorno $(f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$ tal y como se muestra en dicha figura. En esta misma figura 1.5 podemos ver a la derecha lo que ocurre cuando la convergencia es no uniforme. Y es que para todo n siempre existe un x tal que $f_n(x)$ sale fuera del entorno $(f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$. Es evidente que si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $f_n \to f$.

Nuestro próximo objetivo es dar condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funciones converja uniformemente. Para ello vamos a considerar las funciones representadas en la figura 1.5. Vamos a representar gráficamente –ver gráfico 1.6– las funciones $|f(x)-f_n(x)|$ de la figura 1.5. La línea horizontal representa el valor de ϵ escogido. Podemos

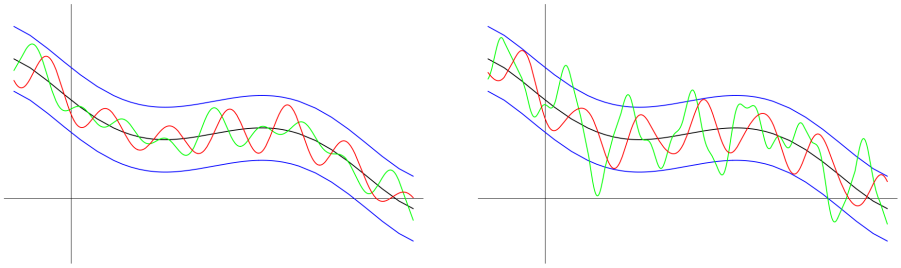


Figura 1.5: Convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de una sucesión de funciones $(f_n(x))_n$.

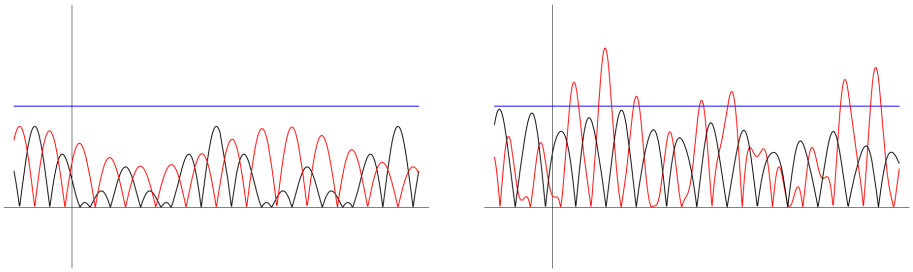


Figura 1.6: Gráficos de $|f(x) - f_n(x)|$ en el caso de la convergencia uniforme (izquierda) y no uniforme (derecha) de $(f_n(x))_n$.

ver de un simple vistazo que para que la convergencia sea uniforme, todos los gráficos de las funciones $\phi_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ han de estar contenidos en el entorno $[0, \epsilon)$ lo cual ocurrirá si los máximos o supremos de cada función $\phi_n(x)$ –que son números– están contenidos en dicho intervalo. No ocurre lo mismo en el caso de la convergencia no uniforme, donde siempre, cualquiera sea el ϵ que escojamos siempre habrá un valor de n tal que el valor de la función $\phi_n(x)$ en cierto punto x_0 del dominio sobrepasa a ϵ, pero entonces, si ese punto no corresponde al máximo, éste, si existe, también ha de sobrepasar a ϵ. Los anteriores razonamientos "geométricos" nos lleva a la siguiente condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme para una sucesión de funciones:

Teorema 1.3.13 *Dada una sucesión de funciones* $f_n(x))_n$ *definidas en* $I \in$

$\mathbb{X}$, *$f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Corolario 1.3.14 *Para que una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converja uniformemente a $f(x)$ en I es necesario y suficiente que exista una sucesión $(a_n)_n$ de términos no negativos con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$.*

Ejercicio 1.3.15 Probar que la sucesión $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a cero en $[0, q]$, $0 < q < 1$, pero no lo hace en $[0, 1)$.

En efecto, en el primer caso tenemos

$$\sup_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n = a_n, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

mientras que en el segundo

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \qquad \text{que no tiende a 0 cuando } n \to \infty.$$

Teorema 1.3.16 (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme) *Dada una sucesión de funciones $f_n(x))_n$ definidas en $I \in \mathbb{X}$, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en I si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Proposición 1.3.17 *Si $(f_n(x))_n$ y $(g_n(x))_n$ son dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes en I a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces*

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \text{en } I, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y

$$h(x) f_n(x) \rightrightarrows h(x) f(x), \qquad \text{para toda función } h(x) \text{ acotada en } I.$$

Pasemos a continuación a estudiar lo que ocurre en el caso de las series de funciones. Por analogía con el caso de las series numéricas definiremos las series de funciones

Definición 1.3.18 *Dada una sucesión de funciones $(a_n(x))_n$, la expresión*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_k(x) + \cdots$$

se denomina serie funcional infinita o serie de funciones. Las funciones

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x),$$

se denominan sumas parciales de la serie de funciones.

Obviamente las sumas parciales $S_n(x)$ son a su vez una sucesión de funciones por tanto podemos definir la convergencia puntual y uniforme de una serie de funciones.

Definición 1.3.19 *Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge a $S(x)$, para cierto $x \in \mathbb{R}$ si la sucesión de sumas parciales $(S_n(x))_n$ tiene límite $S(x)$. Si por el contrario, la sucesión de sumas parciales no tiene límite, entonces diremos que la serie diverge.*

Definición 1.3.20 *Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge puntualmente en $I \in \mathbb{X}$ si para todo $x \in I$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ y lo denotaremos $S_n \to S$.*

Definición 1.3.21 *Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para todos los $x \in I$, $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ y lo denotaremos $S_n \rightrightarrows S$.*

Si definimos el resto de la serie

$$r_n(x) \equiv S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x), \tag{1.3.1}$$

entonces, la serie converge uniformemente si y sólo si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, en caso contrario la convergencia no es uniforme. Una prueba sencilla es usar el

Teorema 1.3.13 para la sucesión de funciones $S(x) - S_n(x)$. En efecto, puesto que $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, tenemos si $r_n(x) \rightrightarrows 0$, entonces existe una sucesión $(a_n)_n$ de términos positivos que tiende cero tal que $|r_n(x)| \leq a_n$, luego $|S(x) - S_n(x)| \leq a_n \to 0$. El recíproco es análogo.

Lo anterior nos conduce al siguiente

Teorema 1.3.22 *Si $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ en I, es decir si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ es uniformemente convergente en I, entonces, $a_n(x)$, el término general de la serie converge uniformemente a 0 en I, es decir $a_n(x) \rightrightarrows 0$.*

Esta condición es necesaria pero no suficiente.

Ejemplo 1.3.23 Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ en $I = [0, 1)$

Como $x^n \not\rightrightarrows 0$ en $[0, 1)$, entonces la serie no converge uniformemente en $[0, 1)$.

Un criterio muy útil para establecer la convergencia uniforme de una serie de funciones es el siguiente Criterio de Weierstrass:

Teorema 1.3.24 *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $|a_n(x)| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ y cuya serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en I.*

Ejercicio 1.3.25 Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. La serie converge uniformemente en el intervalo $x \in [-q, q]$, para todo $q \in (0, 1)$.

Efectivamente, como $x^n \leq q^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge, entonces el criterio de Weierstrass nos asegura la convergencia.

1.3.3. Propiedades de las sucesiones y series de funciones

En este apartado vamos a estudiar en que condiciones las propiedades de f_n se traspasan a la función límite. Es decir, responderemos a la pregunta formulada al principio: ¿hereda $f(x)$ todas las propiedades de las $f_n(x)$?

Teorema 1.3.26 *Sobre la conmutatividad del límite de una sucesión de funciones Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, $x_0 \in I$. Si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en I, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Como corolario trivial tenemos el siguiente

Teorema 1.3.27 *Sobre la continuidad de una sucesión de funciones Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $I \subset \mathbb{R}$. Si f_n es continua en I para todo $n \in \mathbb{N}$, y f_n converge uniformemente a f en I entonces f es continua en I.*

El inverso del teorema anterior es falso en general, es decir que si $f_n(x) \to f(x)$ en I, y tanto $f_n(x)$ como $f(x)$ son continuas en I, ello no implica $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Por ejemplo, sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} nx, & 0 \le x \le \frac{\pi}{n} \\ 0, & \frac{\pi}{n} \le x \le \pi \end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Obviamente tanto $f_n(x)$ como $f(x)$ son continuas en $[0,\pi]$. Ahora bien,

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]} |\operatorname{sen} nx| = 1 \not\to 0,$$

por tanto $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$.

No obstante si imponemos que la sucesión $(f_n(x))_n$ sea monótona sí que se tiene el recíproco.

Teorema 1.3.28 *(Dini) Sea $(f_n(x))_n$ una sucesión de funciones continuas que tienden monótonamente (para cada x) a $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ (cerrado y acotado). Entonces $f(x)$ es continua si y sólo si $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en $[a,b]$.*

Los teoremas anteriores 1.3.26 y 1.3.27 se pueden reescribir para las series de funciones. En efecto si tomamos como sucesión de funciones $(f_n(x))_n$ la sucesión de sumas parciales de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.3.29 *Sobre la conmutatividad del límite y la suma para una serie de funciones Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones uniformemente convergente en I tales que $\lim_{x\to x_0} a_n(x) = a_n$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si además, las funciones $a_n(x)$ son continuas, entonces la suma $S(x)$ de la serie es una función continua.

Teorema 1.3.30 *Sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e integrables en $[a,b]$ y sea f_n uniformemente convergente a f en $[a,b]$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

El siguiente ejemplo pone de manifiesto la importancia de las condiciones del teorema que además son **suficientes**.

Ejemplo 1.3.31 Sea la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 2na_n x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ -2na_n(x-\frac{1}{n}), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

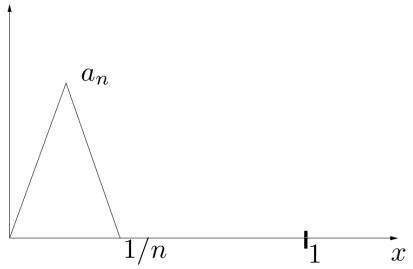


Figura 1.7: La sucesión $(f_n(x))_n$.

Es evidente que las funciones $f_n(x)$ son continuas en $[0,1]$, y por tanto integrables en $[0,1]$ y que cualquiera sea la sucesión $(a_n)_n$ de sus máximos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Como $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = a_n$, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $f_n(x) \rightrightarrows 0$ en $[0,1]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0,$$

lo cual es fácil de comprobar mediante un cálculo directo pues el área de la figura $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \to 0$.

Ahora bien, podemos escoger a_n de forma que $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \to 0$, con $a_n \not\to 0$ –por ejemplo, $a_n = 1$, o incluso $a_n = \sqrt{n} \to \infty$–. En este caso también tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Finalmente, si escogemos a_n de forma que el área $A_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}a_n \not\to 0$, –por ejemplo $a_n = n$ o $a_n = n^2$, además en el primer caso el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ existe y en el segundo no existe (vale $+\infty$)– entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx = 0$.

En el caso de las series tenemos

Teorema 1.3.32 (Integrabilidad de una serie de funciones)
Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e integrables en

$[a,b]$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en I. Entonces su suma $S(x)$ es integrable y además

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Teorema 1.3.33 (Derivabilidad de una sucesión de funciones) *Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ y derivables en I tales que para cierto $x_0 \in I$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$ y además la sucesión de funciones $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ converja uniformemente a g en I. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a cierta función f en I y además $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, es decir la sucesión se puede derivar término a término, i.e.,*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Del teorema anterior se sigue *fácilmente* el siguiente teorema para las series de funciones:

Teorema 1.3.34 *Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ una serie de funciones que converge al menos en un punto $x_0 \in I$, cuyos términos $a_n(x)$ son derivables en todo I, y cuya serie de las derivadas de $a_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ converge uniformemente en I. Entonces la serie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente en I y además se cumple que*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n'(x)\right),$$

o sea, es derivable término a término.

Ejemplo 1.3.35 Consideremos la serie $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, que converge en el intervalo $[-R,R]$, cualquiera sea $R > 0$. Obviamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge uniformemente en $[-R, R]$. Entonces,

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

Es decir, $(e^x)' = e^x$.

Ejemplo 1.3.36 Sea la función

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dicha función es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada, definida por,

$$\psi'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto el cero. Numeremos todos los puntos racionales del intervalo $[0, 1]$ mediante la sucesión $(x_n)_n$, lo cual es posible pues $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable. Definamos la sucesión $a_n(x) = \frac{1}{n^2}\psi(x - x_n)$. Entonces, $a_n'(x) = \frac{1}{n^2}\psi'(x - x_n)$ es discontinua en un único punto $x = x_n$, además

$$|a_n(x)| \leq \frac{|x - x_n|^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad |a_n'(x)| \leq \frac{1 + 2|x - x_n|}{n^2} \leq \frac{3}{n^2},$$

ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ convergen uniformemente en $[0, 1]$ pues ambas se pueden mayorar por la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$. Por tanto el teorema 1.3.34 nos dice que

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'(x)),$$

es decir, que la función $S(x)$ es derivable en todo $[0, 1]$ y su derivada es discontinua en cada uno de los puntos racionales del intervalo.

1.4. Sobre conjuntos infinitos

En este sección recordaremos algunas cuestiones sobre conjuntos infinitos haciendo hincapié en el caso de los números reales.

1.4.1. Conjuntos numerables

Sean dos conjuntos A y B cualesquiera. Por ejemplo, digamos que A es el conjunto de los números primos menores que un número dado (digamos 10), B el de los vértices de un dodecaedro (12 lados). A y B son finitos, es decir están constituidos por un número finito de elementos. Luego, una forma natural para compararlos puede ser sencillamente usando el número de sus elementos. Obviamente A tiene seis elementos, $1, 2, 3, 5, 7$ y B doce, así que B será más grande que A. Sea ahora C el conjunto de los lados de un hexágono. Entonces C y A tienen el mismo número de elementos de forma que podemos hacer corresponder a cada uno de los elementos de C el correspondiente elemento de A y viceversa. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y C. Obviamente tal correspondencia es imposible de encontrar entre los elementos de A y B o B y C (¿por qué?).

¿Qué ocurre si ahora A Y B tienen infinitos elementos, es decir son conjuntos infinitos? Ejemplo de tales conjuntos son conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.

En este caso el primer método de comparar conjuntos no nos sirve pues no podemos "contar" los elementos ya que éstos son infinitos así que sólo nos queda el segundo de ellos: intentar encontrar una correspondencia biunívoca entre conjuntos.

En adelante denotaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ al conjunto de los números naturales que es el conjunto infinito más sencillo.

Definición 1.4.1 *Un conjunto A es numerable si*

1. *A es vacío.*
2. *A tiene un número finito de elementos.*
3. *Si A tiene un número infinito de elementos, estos se pueden poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$.*

Veamos algunos ejemplos.

Por ejemplo, P, el conjunto de todos los números pares es numerable. En efecto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ existe un único $p \in P$ tal que $p = 2n$ y viceversa, cualquiera sea $p \in P$, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p/2$, es decir existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, o lo que es lo mismo *hay tantos números pares como naturales*.

Existe una forma muy sencilla de probar lo anterior. Escribamos todos los números naturales en una tabla

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$

y eliminemos todos los impares y "contamos" los números resultantes. Así tenemos

$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cdots$	$\cancel{2n-1}$	$2n$	$\cancel{2n+1}$	$2n+2$	$\cdots$
	1		2		3	$\cdots$		n		$n+1$	$\cdots$

es decir, P es numerable, los números pares se pueden "contar", existe una correspondencia biyectiva entre los números pares y los naturales.

De forma similar se puede proceder para probar que el conjunto de los números impares I es numerable. Lo mismo ocurre con los enteros

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$

Veamos un ejemplo más complicado. Sea A el conjunto de puntos del plano de la forma (n, m), $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces A es numerable.

Para comprobarlo vamos a "*contar*" todos los pares anteriores, es decir vamos a construir una función biyectiva que a cada par le haga corresponder un único valor de $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos siguiendo el siguiente esquema: ordenamos los pares por filas según la suma $n + m = 2, 3, 4, \ldots$ y cada fila la ordenamos de menor a mayor según el primer valor n y así tenemos una correspondencia biunívoca tal y como se ve en la figura 1.4.1

De forma análoga se puede probar la siguiente

Proposición 1.4.2 *El conjunto $B = \{(p, q)\,;\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ es numerable, es decir que se puede construir una "ordenación" de B similar a la del ejemplo anterior.*

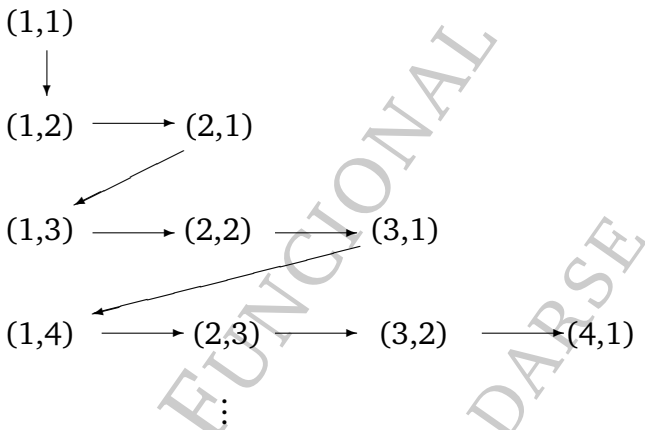


Figura 1.8: Contando el conjunto $A = \{(n, m), ; n, m \in \mathbb{N}\}$.

Una consecuencia de la proposición anterior es la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. En efecto, sea un número r racional cualquiera, $r \in \mathbb{Q}$. Entonces r se puede escribir como $r = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Así que a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ que es un subconjunto de los pares B definidos en la proposición 1.4.2 (por qué?), así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

1.4.2. Propiedades de los conjuntos numerables

Veamos algunas propiedades de los conjuntos numerables. La siguiente proposición es sencilla de probar:

Proposición 1.4.3 1. *Si A es un conjunto numerable y B es un subconjunto de A, entonces B es numerable.*

2. *La unión de un conjunto numerable y uno finito es numerable.*

3. *La unión de dos conjuntos numerables es numerable, y por tanto la unión de un número finito de conjuntos numerables es numerable.*

4. *La unión de un número numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Para probar el último apartado podemos escribir cada uno de los conjuntos numerables de la forma $A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots a_{1,n}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, \dots a_{2,n}, \dots\}$,..., $A_m = \{a_{m,1}, a_{m,2}, \dots a_{m,n}, \dots\}$, y escribirlos como pares (m, n), $n, m \in \mathbb{N}$. Dichos pares son los representados en la figura 1.4.1 y, como ya vimos, son numerables. Luego tenemos 4. Está claro que 2 y 3 son casos particulares de 4. Para probar 1, basta usar la reducción al absurdo.

Veamos como usando los apartados anteriores podemos probar los ejercicios que antes hemos resuelto.

Sea $\mathbb{N}^-$ el conjunto de los números enteros negativos y sea $\mathbb{Z}_k$, $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos de los números de la forma n/k, con $n \in \mathbb{Z}$, es decir $\mathbb{Z}_k = \{n/k\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Obviamente $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, pero tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{N}^-$ son numerables, así que $\mathbb{Z}$ es numerable. Además, por construcción $\mathbb{Z}_k$ es numerable. Además, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \dots \cup \mathbb{Z}_k \cup \dots$, o sea $\mathbb{Q}$ es la unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables así que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Definamos ahora el conjunto "producto directo" de dos conjuntos. Sea A y B dos conjuntos cualesquiera. Definiremos el "producto directo" de A y B que denotaremos por $A \otimes B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Está claro que si A y B son numerables el conjunto $A \otimes B$ es numerable. Para ello basta usar de forma inteligente las proposiciones 1.4.2 y 1.4.3.

Como consecuencia de lo anterior tenemos otra prueba de que $\mathbb{Q}$ es numerable pues, como hemos visto, a cada número racional le podemos hacer corresponder el par (p, q) con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, p, q primos entre si, o sea, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{N}$.

Usando la proposición 1.4.3 se puede comprobar que el el conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo más n con coeficientes $a_0, \dots a_n$ racionales:

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Q}\},$$

es numerable y, por tanto, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales

$$\mathbb{P} = \{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n\,;\, a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

también lo es pues $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \cdots$. Para esto último podemos usar la inducción sobre n y que $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n \cup \{a_{n+1} x^{n+1}\,;\, a_{n+1} \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 1.4.4 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que x es solución de la ecuación algebraica*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n x^n = 0, \quad , n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Q}.$$

Entonces se dice que x es un número algebraico. Si x no es solución de ninguna ecuación algebraica, entonces se dice trascendente.

Por ejemplo, 2 es un número algebraico ($x - 2 = 0$), $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico pues es solución de $x^2 - 2 = 0$. Se puede probar que e u π son trascendentes.

Nótese que, a diferencia de los números irracionales, ningún número racional puede ser trascendente (¿por qué?). Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de todos los números algebraicos y $\mathbb{T}$ el de los trascendentes. Dado que un polinomio de grado n solo puede tener n raíces y que el conjunto $\mathbb{P}$ es numerable se sigue que el conjunto $\mathbb{A}$ es numerable.

Ejemplo 1.4.5 *Prueba que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable A es numerable.*

Para comprobarlo usaremos la Proposición 1.4.3. Está claro que el conjunto A_1 de todos los subconjuntos de A con un solo elemento es numerable. En conjunto A_2 de todos los subconjuntos de A con dos elementos es numerable. En general, el conjunto A_n de todos los subconjuntos de A con $n \in \mathbb{N}$ elementos es numerable. De esta forma obtenemos un conjunto numerable $(A_1, A_2, \ldots)$ de conjuntos numerables. ■

Así, por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos finitos de números racionales es numerable. Basta identificar $A = \mathbb{Q}$, A_1 con el conjuntos de todos lo racionales q, A_2 con el conjunto de todos los pares de racionales (p, q), y así sucesivamente.

Definición 1.4.6 *Dos conjuntos A y B se denominan equivalentes y se denota por $A \sim B$ si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos. En este caso el "número" de sus elementos es el mismo lo que se suele denotar por* $\text{card } A = \text{card } B$[6].

[6]En realidad el concepto de cardinal o potencia de un conjunto es ligeramente más complicado que el número de sus elementos, pero para nuestros objetivos esta definición es suficiente.

En fácil comprobar entonces que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ (¿por qué?) y que si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

Por ejemplo, según hemos visto antes $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{A}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{A}$, etc.

Es evidente que el conjunto de los números racionales que pertenecen al conjunto $[0,1]$ es numerable pues son un subconjunto de $\mathbb{Q}$. La pregunta es ¿será también numerable el conjunto de los irracionales contenidos en $[0,1]$?, o, equivalentemente, ¿será numerable $[0,1]$?

Vamos a intentar responder a esta pregunta.

Supongamos que $[0,1] \sim \mathbb{N}$. Entonces ha de existir una sucesión de números reales $(x_n)_n$ tal que cualquiera sea $x \in [0,1]$, x coincidirá con al menos un miembro de la sucesión $(x_n)_n$ (en caso contrario $[0,1]$ no sería numerable, ¿por qué?).

Hagamos la siguiente construcción: sea $I_0 = [0,1]$. Escojamos un intervalo cerrado $I_1 \subset I_0$ que no contenga a x_1, o sea, $x_1 \notin I_1$. A continuación escojamos un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$ que no contenga a x_2, o sea, $x_2 \notin I_2$, y así sucesivamente. Entonces tenemos una sucesión de intervalos (cerrados) encajados tal que $I_{n+1} \subset I_n$ pero $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Entonces, existe al menos un $x \in I_n$ para todo $n \geq 0$. ¿Puede ser eso posible? Justifica tu respuesta.

De lo anterior se deduce el Teorema de Cantor

Teorema 1.4.7 *$\mathbb{R}$ no es numerable. ($\operatorname{card} \mathbb{R} > \operatorname{card} \mathbb{N}$)*

Como corolario tenemos

Corolario 1.4.8

1. *$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$, es decir, existe $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto de los números irracionales, y además $\mathbb{I}$ no es numerable.*
2. *$\mathbb{A} \neq \mathbb{I}$, existe el conjunto de los números trascendentes $\mathbb{T}$, y $\mathbb{T}$ no es numerable.*

Resulta que la mayoría de los números irracionales que conocemos son algebraicos, por ejemplo $\sqrt[n]{k}$ si $k \neq l^n$, $l \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (prueba que este número es irracional algebraico), etc. Por el contrario se conocen pocos números trascendentes: π, e. No obstante resulta que éstos son la mayoría de todos los números ya que los números algebraicos (que incluyen, como

hemos visto a los racionales) es un conjunto numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es y obviamente $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$.

Automáticamente surge la pregunta. ¿Existirá algún conjunto infinito intermedio entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$?, es decir, que tenga "más" elementos que $\mathbb{N}$ pero "menos" que $\mathbb{R}$?

Georg Cantor fue quien desarrolló la teoría moderna de conjuntos infinitos, a él debemos la notación y algunos de los resultados que hemos descrito aquí. Precisamente fue Cantor quien conjeturó que no existía dicho conjunto intermedio (hipótesis del continuo). Este fue el primero de los 23 famosos problemas que formuló Hilbert en 1900. La respuesta a este problema fue totalmente inesperada. Por un lado Kurt Gödel probó en 1940 que usando los axiomas de la teoría de conjuntos era imposible desmentir la hipótesis de Cantor. La respuesta definitiva la dio Paul Cohen en 1963 cuando demostró que bajo el mismo sistema de axiomas de la teoría de conjuntos era imposible probar la conjetura, o sea, la hipótesis del continuo se puede aceptar o no y eso no lleva a ninguna contradicción lógica dentro de la teoría de conjuntos.

Capítulo 2

¿Qué es el análisis funcional?

¿Cómo comenzar el curso de Análisis funcional? Sin duda una posibilidad es con un poco de historia, pero para eso se puede consultar el muy completo artículo de Berta Gamboa de Buen, *Historia del Análisis Funcional* publicado en la revista *Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, volumen **28** (1999) páginas 17-39[1]. Como bien cuenta su autora, el análisis funcional surge y se desarrolla en el siglo XX generado por la evolución de análisis matemático clásico, la física-matemática, las nuevas ideas del álgebra y la geometría y muy ligado a la topología. En otras palabras de alguna forma aúna las principales áreas de la matemática. Nosotros, sin embargo, vamos a proceder de otra forma. Vamos a seguir la idea de Schechter en [9] y comenzar con un ejemplo relativamente sencillo que nos conducirá a redescubrir varios de los conceptos fundamentales del análisis clásico así como algunos otros del propio análisis funcional.

2.1. Una ecuación diferencial lineal

Uno de los problemas típicos de un curso de ecuaciones diferenciales es la resolución del siguiente problema de valores iniciales

$$f''(x) + f(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1, \; f'(a) = 0, \tag{2.1.1}$$

donde por f' denotamos la derivada de f respecto a x. Además, por simplicidad asumiremos que g es una función continua en $[a, b]$ y que f, la

[1] https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/28

solución buscada, es una función dos veces diferenciable con segunda derivada continua. Así, usaremos la notación $g \in C_{[a,b]}$ y $f \in C^2_{[a,b]}$, para denotar al conjuntos de funciones continuas en $[a, b]$ y las que son dos veces diferenciable con segunda derivada continua en $[a, b]$, respectivamente.

Se puede comprobar que la (una) solución de dicho problema (2.1.1) viene dada por la expresión

$$f(x) = \cos(x - a) + \int_a^x \sin(x - t)g(t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{2.1.2}$$

Comprobemos que, efectivamente, la función f anterior es solución de la ecuación (2.1.1) con los valores iniciales dados. Lo primero que es *obvio* es que $f(a) = 1$, pues la integral en (2.1.2) es cero. Calculemos ahora $f'(x)$. El primer sumando no tiene problemas, pero el segundo es algo más complicado pues la variable x aparece tanto en el límite de integración, como en la función a integrar. Este problema es un problema típico de la teoría de integrales dependientes de un parámetro. Así pues, para calcular la derivada de nuestra función f conviene recordar el siguiente teorema:[2]

Teorema: *Sea $h(t, x)$ una función continua en $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a, b], x \in [c, d]\}$. Entonces la función $H(x) = \int_a^b h(t, x)dt$ es continua y diferenciable en $[c, d]$ y*

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt.$$

Idea de la demostración: Para probar la continuidad se puede usar el Teorema de Heine 1.3.5 para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado D que establece que si f es continua en D, entonces f es uniformemente continua en D, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall (t, x), (t', x') \in D$, que satisfacen $\sqrt{(t - t')^2 + (x - x')^2} < \delta$, se tiene $|h(t, x) - h(t', x')| < \epsilon$. Entonces, para todos x, x' tales que $|x - x'| < \delta$,

$$|H(x) - H(x')| \leq \int_a^b |h(t, x) - h(t, x')|dt \leq \epsilon(b - a),$$

i.e., $H(x) \to H(x')$ cuando $x \to x'$. Para probar la diferenciabilidad basta mostrar que para todo $x_0 \in [c, d]$

$$\lim_{h \to 0} H(x_0 + h) - H(x_0) - H'(x_0)h = o(h),$$

[2]Ver, por ejemplo, la sección §17.1.13 de [13].

donde $o(h)$ es tal que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$, lo que se puede probar de forma similar a la continuidad por lo que lo dejamos como ejercicio al lector. ■

Sea $\alpha(x)$ una función diferenciable en $[c, d]$ cuya imagen esté contenida en $[a, b]$ y sea la función $\Phi(\alpha, x) = \int_a^\alpha h(t, x)dt$, $\alpha \in [a, b]$, $x \in [c, d]$. Usando el teorema fundamental del cálculo así como el teorema anterior tenemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, x) = \int_a^\alpha \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha, x) = h(\alpha, x).$$

Dado que ambas derivadas parciales son continuas, entonces $\Phi(\alpha, x)$ es diferenciable en $\alpha \in [a, b]$, $x \in [c, d]$. Definamos ahora la función compuesta $\Psi(x) = \Phi(\alpha(x), x)$, $x \in [c, d]$. Dicha función es diferenciable en $x \in [c, d]$ así que usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha'(x)h(\alpha(x), x) + \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt.$$

Aplicando la fórmula anterior a nuestra función f definida en (2.1.2), donde en el segundo sumando $\alpha(x) = x$ y $h(t, x) = \sin(x - t)g(t)$, obtenemos

$$f'(x) = -\sin(x - a) + \int_a^x \cos(x - t)g(t)dt, \qquad x \in [a, b], \tag{2.1.3}$$

y

$$f''(x) = -\cos(x - a) + g(x) - \int_a^x \sin(x - t)g(t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{2.1.4}$$

Nótese que esta última expresión se puede escribir, usando (2.1.2), como

$$f''(x) = -f(x) + g(x) \quad \Rightarrow f''(x) + f(x) = g(x), \qquad x \in [a, b].$$

Además, de (2.1.3) se tiene que $f'(a) = 0$ y, por tanto, dado que $f(a) = 1$ como ya vimos, la función f definida por (2.1.2) es efectivamente la solución del problema (2.1.1).

El método anterior nos permite, al menos formalmente, plantearnos el siguiente problema: resolver el problema de valores iniciales

$$f''(x) + f(x) = \sigma(x)f(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1, \ f'(a) = 0. \tag{2.1.5}$$

Está claro que la *solución* será

$$f(x) = \cos(x-a) + \int_a^x \sin(x-t)\sigma(t)f(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{2.1.6}$$

Lo anterior define una ecuación integral. Escribamos la ecuación anterior de una forma más conveniente.

Sea $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$ y sea $k(x,t)$ una función continua en D. Definamos el *operador* K, $K : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$

$$Kf := K(f(x)) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt. \tag{2.1.7}$$

Entonces (2.1.6) la podemos reescribir como

$$f = u + Kf, \quad u = \cos(x-a), \quad k(x,t) = \sin(x-t)\sigma(t).$$

¿Cómo resolver esta ecuación?

2.2. La ecuación integral de Volterra

Vamos a intentar resolver la ecuación

$$f(x) = u(x) + Kf(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.2.1}$$

donde $u, f \in C_{[a,b]}$ y K es el operador de Volterra definido en (2.1.7).

Nótese que K trasforma funciones continuas en funciones continuas. Una forma natural de resolverla es siguiendo el conocido método iterativo de Picard:

Elegimos una función $f_0 \in C_{[a,b]}$ cualquiera y la sustituimos en el miembro derecho de (2.2.1) lo que nos dará, en principio, una nueva función continua f_1

$$f_1(x) = u(x) + Kf_0(x), \quad x \in [a,b]. \tag{2.2.2}$$

Es improbable que $f_1 = f_0$, lo que nos daría la solución buscada, de forma que sustituimos f_1 en el miembro derecho de (2.2.1)

$$f_2(x) = u(x) + Kf_1(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.2.3}$$

y así, sucesivamente, obtenemos una sucesión de ecuaciones

$$f_n(x) = u(x) + Kf_{n-1}(x), \quad x \in [a,b], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.2.4}$$

Como ya hemos dicho, es improbable que para algún n, $f_n = f_{n-1}$, así que la pregunta natural es ¿cuán cerca está f_n de f si n es muy grande? y ¿qué significa que f_n esté cerca de f, o que $f_n \to f$ en $[a,b]$ cuando $n \to \infty$?

Está claro que esta pregunta corresponde a saber cuando una sucesión de funciones continuas f_n converge a alguna función f, y para que f sea solución de (2.2.1) necesitamos además que f sea continua.

Por otro lado, nótese que si $f_n \to f$, otra pregunta natural es si $Kf_n \to Kf$. Si esto fuera así, entonces, tomando límites cuando $n \to \infty$ en (2.2.4) obtendríamos (2.2.1) y por tanto resolveríamos la ecuación. Intentemos formalizar lo anterior de una forma rigurosa.

Como las f_n son continuas y nos interesa que la función límite también lo sea, entonces podemos usar el concepto de convergencia uniforme de funciones (véase la sección 1.3.2). Allí vimos que una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a f en $[a,b]$ si

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Lo anterior nos da una idea de como definir la *distancia* ρ entre dos funciones f y g. Así, dada dos funciones $f, g \in C_{[a,b]}$ definiremos la distancia $\rho(f,g)$ mediante la expresión

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

De esta definición se sigue que $\forall f, g, h \in C_{[a,b]}$,

1. $\rho(f,g) \geq 0$ y $\rho(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$,
2. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$, y
3. $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$.

En muchas ocasiones se dice que la función ρ que satisface las propiedades anteriores define una *métrica*. Los conjuntos donde se puede definir una métrica se suelen denominar espacios métricos (ver la definición 3.1.1).

Asociada a la definición de distancia se puede definir el *tamaño* o la *norma* de una función. Así, dada una función $f \in C_{[a,b]}$ definiremos la norma de f, $\|f\|$ al número

$$\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{2.2.5}$$

Es fácil comprobar que la *norma* anterior satisface las siguientes propiedades: $\forall f, g \in C_{[a,b]}$,

1. $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$,
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Los conjuntos donde se puede definir una norma se denominan espacios normados (ver la definición 4.2.1).

Lo siguiente que queremos hacer notar es que el espacio de las funciones continuas $C_{[a,b]}$ satisface una serie de interesantes propiedades que pasamos a enumerar:

1. Para todos $f, g \in C_{[a,b]}$, la suma, $h = f + g \in C_{[a,b]}$ y para todos $f, g, h \in C_{[a,b]}$ se cumple que:
   a) $f + g = g + f$
   b) $(f + g) + h = f + (g + h)$
   c) $f + \emptyset = \emptyset + f = f$, donde $\emptyset$ denota a la función $\emptyset : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $\emptyset(x) = 0$.
   d) Cualquiera sea f existe una función $(-f)$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \emptyset$.
2. Para todo $f \in C_{[a,b]}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, $g = \alpha \cdot f \in C_{[a,b]}$, y para todos $f, g \in C_{[a,b]}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:
   a) $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$,
   b) $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$,
   c) $\alpha \cdot (\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f$
   d) $1 \cdot f = f$

Los conjuntos que satisfacen las propiedades anteriores se denominan espacios vectoriales (ver la definición 4.1.1).

De la propia definición del operador K (2.1.7), usando las propiedades de la integral, tenemos que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_{[a,b]}$,

$$K(\alpha f + \beta g) = \alpha K f + \beta K g. \tag{2.2.6}$$

Si un operador que cumple con lo anterior se dice que es un operador *lineal*.

Además, para toda función $f \in C_{[a,b]}$ se tiene, usando (2.1.7),

$$\begin{aligned} |Kf| &\leq \int_a^x |k(x,t)||f(t)|dt \leq \int_a^x \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|dt \\ &\leq \kappa\|f\|(x-a) \leq \kappa\|f\|(b-a) = c\|f\|, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

donde $\kappa = \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|$ y $c = \kappa(b-a)$. Es decir, para toda $f \in C_{[a,b]}$, existe un $c \geq 0$ tal que

$$\|Kf\| = \sup_{t\in[a,b]} |Kf| \leq c\|f\|. \tag{2.2.8}$$

Los operadores que cumplen con dicha propiedad se denominan operadores acotados.

Armados de todo lo anterior estamos en condiciones de responder a nuestra pregunta sobre si la ecuación (2.2.1) tiene solución y si esta la podemos encontrar mediante el límite de la sucesión de funciones f_n definidas por (2.2.4).

Para ello vamos a estimar el valor de $\|f_n - f_m\|$ donde la norma es la definida en (2.2.5). Si resulta que su valor es tan pequeño como se quiera cuando n, m son lo suficientemente grandes entonces f_n converge uniformemente a una función continua f en $[a,b]$.

Usando (2.2.3) tenemos, usando (2.2.2)

$$f_2 = u + Kf_1 = u + K(u + Kf_0) = u + Ku + K(Kf_0) = u + Ku + K^2 f_0,$$

donde K^2 es el operador que se obtiene al componer, o multiplicar, K por si mismo: $K^2 : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $K^2 f = (K \circ K)(f) = K(Kf)$. En general, definiremos el operador K^n inductivamente, i.e., $K^n = K \circ K^{n-1}$.

Continuando este proceso podemos comprobar por inducción que

$$f_n = u + Ku + K^2u + \cdots + K^{n-1}u + K^n f_0,$$

por tanto, para todos $m < n$ obtenemos

$$f_n - f_m = K^m u + \cdots + K^{n-1}u + K^n f_0 - K^m f_0.$$

Entonces, usando las propiedades de la norma (concretamente la tercera)

$$\|f_n - f_m\| \leq \|K^m u\| + \cdots + \|K^{n-1}u\| + \|K^n f_0\| + \|K^m f_0\|. \tag{2.2.9}$$

Vamos a acotar cada uno de los sumandos. Nótese que estos se pueden escribir de la forma $\|K^n h\|$, $h \in C_{[a,b]}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Para $n = 1$ ya hemos visto en (2.2.8) que $\|Kh\| \leq c\|h\|$. Entonces,

$$\|K^2 h\| = \|K(Kh)\| \leq c\|Kh\| \leq c^2\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \leq c^n\|h\|. \tag{2.2.10}$$

De esta forma podríamos obtener una cota superior de la suma del miembro derecho de (2.2.9), pero dicha cota solo es útil si $c < 1$ pues en caso contrario cualquiera de los sumandos tendería a infinito cuando $n \to \infty$.

Vamos a *afinar* nuestra cota. Como vimos en (2.2.7) tenemos que

$$|Kh| \leq \kappa\|h\|(x-a),$$

luego

$$\begin{aligned}
|K^2 h| = |K(Kh)| &\leq \int_a^x |k(x,t)||Kh|dt \leq \kappa \int_a^x |Kh|dt \\
&\leq \kappa^2\|h\| \int_a^x (x-a)dt = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{2}\|h\|, \\
|K^3 h| = |K(K^2 h)| &\leq \int_a^x |k(x,t)||K^2 h|dt \leq \kappa \int_a^x |K^2 h|dt \\
&\leq \frac{\kappa^3\|h\|}{2} \int_a^x (x-a)^2 dt = \frac{\kappa^3(x-a)^3}{3!}\|h\|.
\end{aligned}$$

y, así, por inducción, obtenemos

$$|K^n h| \leq \frac{\kappa^n(x-a)^n}{n!}\|h\|,$$

que tomando supremos en $x \in [a,b]$ nos conduce a una cota mucho más fina que la obtenida en (2.2.10)

$$\|K^n h\| \leq \frac{\kappa^n (b-a)^n}{n!} \|h\|, \tag{2.2.11}$$

Por tanto, podemos reescribir (2.2.9)m usando $\zeta = (b-a)\kappa$, como

$$\|f_n - f_m\| \leq \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \right) \|u\| + \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!} \right) \|f_0\|. \tag{2.2.12}$$

Por un lado está claro que $\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Por el otro,

$$\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

pues es la cola de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} = e^{\zeta}$. De esta forma hemos probado que f_n es uniformemente convergente y que límite f es una función continua en $[a,b]$.

Probemos ahora que $Kf_n \to Kf$ si $f_n \to f$. Para ello, usaremos la linealidad y la acotación de K (ver (2.2.6) y (2.2.8), respectivamente)), que nos conduce a

$$\|Kf_n - Kf\| = \|K(f_n - f)\| \leq c\|f_n - f\| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por tanto, si ahora tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en (2.2.4), obtenemos (2.2.1) lo que prueba que la sucesión f_n construida mediante el método iterativo de Picard aquí descrito tiende a la solución de la ecuación integral de Volterra (2.2.1).

Hemos encontrado una solución de (2.2.1) pero ¿es única? Probemos que si. Supongamos que hay dos funciones continuas en $C_{[a,b]}$, f y g, con $f \neq g$ tales que $f = u + Kf$ y $g = u + Kg$. Restando ambas tenemos $f - g = K(f-g)$. Sea $h = f - g$. Entonces

$$h = Kh \quad \Rightarrow \quad h = K(Kh) = K^2 h = K^2(Kh) = K^3 h = \cdots = K^n h,$$

y, por tanto, $\|h\| = \|K^n h\|$. Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior y usamos (2.2.11) obtenemos $\|K^n h\| \to 0$ de donde se deduce que $\|h\| = 0$, i.e. $f = g$, lo cual es una contradicción.

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. Toda sucesión $f_n \in C_{[a,b]}$ tal que $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (es decir una sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty$. Esta propiedad se conoce como propiedad de completitud del espacio (ver Definición 3.5.12).

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas? ¿Qué otras propiedades importantes son necesarias para lidiar con estos espacios? ¿Con qué otros tipos de operadores podemos encontrarnos en la práctica?

Nuestro objetivo será estudiar algunas de las propiedades de los espacios *funcionales* así como de cierta clase de operadores que generalizan el operador de Volterra discutido en este capítulo.

Capítulo 3

Espacios métricos

Los espacios métricos son la *extensión natural* de los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La idea consiste en, dado un conjunto cualquiera de elementos, poder medir la distancia entre ellos.

3.1. Definición de espacio métrico

Definición 3.1.1 *Un espacio métrico es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

En adelante diremos simplemente que $\mathbb{X}$ es el espacio y ρ su métrica.

Veamos varios ejemplos representativos de espacios métricos. Nótese que muchos de ellos están definidos sobre el mismo conjunto $\mathbb{X}$ pero con diferentes funciones ρ, i.e., la métrica cambia.

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $\mathbb{X}$ *un conjunto arbitrario y definamos la métrica* trivial $\rho(x, y) = 1$ *si* $x \neq y$ *y* $\rho(x, y) = 0$ *si* $x = y$. *Este espacio se suele denominar espacio métrico discreto.*

Ejemplo 3.1.3 *Si $\mathbb{X}$ es el conjunto de todos los números reales y $\rho(x,y) = |x-y|$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x, obtenemos un espacio métrico normalmente denotado por $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.1.4 *El espacio métrico $\mathbb{C}$ es el espacio definido por el par $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ y la métrica $\rho(x,y) = |x-y|$, donde $|x|$ es el módulo de x.*

Ejemplo 3.1.5 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_2$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Ejemplo 3.1.6 *Si $\mathbb{X}$, es el espacio de las n-tuplas reales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pero con la métrica*

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

obtenemos otro espacio métrico (distinto al anterior) que denotaremos por $\mathbb{R}^n_1$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Una generalización de los dos ejemplos anteriores es el siguiente:

Ejemplo 3.1.7 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la métrica*

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_p$. Análogamente se puede definir para el caso complejo.

Ejemplo 3.1.8 $\mathbb{R}^n_\infty$*. Es decir, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pero con la métrica:*

$$\rho(x,y) = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|.$$

Ejemplo 3.1.9 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$. Definamos la función*

$$\rho(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

El par obtenido $C_\infty([a, b])$ es un espacio métrico.

Ejemplo 3.1.10 *Sea nuevamente $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$ y definamos la métrica*

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

El par obtenido $C^p_{[a,b]}$ es un espacio métrico. Como caso particular (de especial relevancia) tenemos el caso $p = 2$, i.e., $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$ y ρ es la función

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2}.$$

Ejemplo 3.1.11 *Sea $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones numéricas reales (o complejas) $x = (x_n)_n$ acotadas y definimos la métrica*

$$\rho(x, y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

El espacio obtenido es un espacio métrico que denotaremos por ℓ^∞.

Ejemplo 3.1.12 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales (o complejas) $x = (x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < +\infty$ con la métrica*

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Dicho espacio lo denotaremos por ℓ^p.

Un caso particular de los espacios ℓ^p es cuando $p = 2$, i.e., el espacio métrico ℓ^2 usualmente asociado al nombre de Hilbert. O sea, $\ell^2 = (\mathbb{X}, \rho)$ donde $\mathbb{X}$ es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < +\infty$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^2}.$$

Ejemplo 3.1.13 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ y definamos la métrica por*

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Este espacio también es un espacio métrico.

Ejemplo 3.1.14 *Sea el espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$. Entonces si definimos sobre $\mathbb{X}$ una nueva métrica $\sigma(x,y)$*

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)},$$

obtenemos un nuevo espacio métrico $(\mathbb{X}, \sigma)$.

Teorema 3.1.15 *(Desigualdad de Minkowski) Sea los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1.1}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c\, y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales).

La desigualdad de Minkowski (3.1.1) se puede extender fácilmente al caso de las series infinitas (ver problema 3.5), en el caso de que las mismas converjan. Así se tiene, en particular para las sucesiones numéricas $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$, que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.2}$$

Análogamente, para las funciones integrables correspondientes (i.e., donde estén definidas las integrales) se tienen (ver problema 3.6) la desigualdades de y Minkowski para integrales, para todo $p \geq 1$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.3}$$

3.2. Algunas definiciones topológicas

Definición 3.2.1 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico, $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r > 0$. Definiremos la bola abierta $B(x_0, r)$ al conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\},$$

bola o esfera cerrada $S(x_0, r)$ al conjunto

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Las bolas abiertas $B(x_0, \epsilon)$ se suelen denominar ϵ-vecindades (o entornos) de x_0. Es evidente que toda ϵ-vecindad de x_0 contiene al propio x_0. Se suele decir que un entorno es pequeño si ϵ es pequeño.

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica habitual[1]. Entonces $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ y $S(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$.

Definición 3.2.2 *Un punto x_0 se denomina punto interior del conjunto $M \subset \mathbb{X}$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.*

Es decir, un punto x es un punto interior de M si existe un entorno de dicho punto contenido en M. Por ejemplo, 1 es un punto interior de $(0, 2]$ con la métrica de $\mathbb{R}$, sin embargo 2 no lo es.

Definición 3.2.3 *Se dice que un punto $x_0 \in \mathbb{X}$ (no necesariamente $x_0 \in M \subset \mathbb{X}$) es un punto de la frontera de M si en cualquier entorno de x_0 (tan pequeño como se quiera) hay al mismo tiempo elementos de M y de su complementario $\mathbb{X} \backslash M$ (pudiendo ser, en ambos casos, el propio x_0). El conjunto de todos los puntos frontera de M se denomina frontera de M y se suele denotar por ∂M.*

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $M = (0, 1]$. Todos los $x_0 \in (0, 1)$ son interiores y los puntos 0 y 1 constituyen la frontera.

Nótese que puesto que la definición de punto frontera es simétrica respecto a al conjunto $M \subset \mathbb{X}$ y su complementario $\mathbb{X} \backslash M$, luego ambos tienen la misma frontera.

[1] En adelante, a no ser que se diga lo contrario, para $\mathbb{R}$ y los distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$ usaremos la métrica habitual, es decir, la del ejemplo 3.1.3.

Definición 3.2.4 *Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si todos sus puntos son interiores. Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$ si es su complementario en $\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \backslash M$ es abierto.*

Está claro que un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si y solo si todos sus puntos (elementos) se pueden encerrar en una bola abierta contenida completamente en M. Nótese también que, dado un entorno $B(x_0, \epsilon)$ de x_0, y cualquiera sea $y \in B(x_0, \epsilon)$ existe un entorno de y tal que $B(y, \delta) \subset B(x_0, \epsilon)$. Es decir, cualquier punto dentro de una bola abierta (entorno) es el centro de un entorno contenido en dicha bola. Para probarlo notemos que todos los puntos z del entorno $B(x_0, \epsilon)$ sol tales que $\rho(x, z) < r$. Sea la bola $B(y, \delta)$ con $0 < \delta < r - \rho(x, y)$. Entonces, para todo $z \in B(y, \delta)$ tendremos que $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \delta = r$. O sea $B(y, \delta) \subset B(x_0, \epsilon)$. De lo anterior se deduce que las bolas son conjuntos abiertos.

Nótese que la definición de conjunto abierto es equivalente a decir que todos los puntos $x \in E$ están contenidos en un subconjunto abierto $F \subset E$ de E (si F es abierto todos los puntos de F son interiores, luego x es un punto interior de F y por tanto de E).

Por ejemplo, sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. El conjunto $(0, 1)$ es abierto, $[0, 1]$ es cerrado y $[0, 1)$ no es ni abierto ni cerrado.

Proposición 3.2.5 *Un conjunto es abierto si y solo si no contiene ningún punto frontera.*

Proposición 3.2.6 *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus punto frontera.*

Nótese que la frontera ∂M de cualquier conjunto M es un cerrado.

La siguiente proposición es de gran interés en la práctica:

Proposición 3.2.7 *Sea Σ en conjunto de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$. Entonces*

1. *$\emptyset \in \Sigma$, $\mathbb{X} \in \Sigma$,*
2. *la unión (finita o infinita) de subconjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es abierto: Si U_k, $k = 1, 2, \ldots$ son abiertos, $\bigcup_k U_k \in \Sigma$*

3. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto: Si* U_k*,* $k = 1, 2, \ldots, n$ *son abiertos,* $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \Sigma$.

Las tres propiedades anteriores son de extrema importancia. Tal es así que ellas definen un tipo de espacios muy generales: Los espacios topológicos. Así, el par, dados un conjunto $\mathbb{X}$ y una colección Σ de subconjuntos de $\mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \Sigma)$ se denomina espacio topológico si Σ cumple con los *axiomas* (propiedades) 1, 2 y 3 de la proposición anterior. Al conjunto Σ se le denomina *topología* de $\mathbb{X}$. Así pues, todo espacio métrico es un espacio topológico.

Nota 3.2.8 *La intersección de un infinitos conjuntos abiertos no tiene que ser un abierto:* $\bigcap_{k=1}^{\infty}(0, 1 + 1/k) = (0, 1]$. *La unión de infinitos conjuntos cerrados no tiene que ser cerrada:* $\bigcup_{k=1}^{\infty}[0, 1 - 1/k) = [0, 1)$.

Definición 3.2.9 *Sea* $M \subset \mathbb{X}$. *Diremos que* $x \in \mathbb{X}$ *es un punto de contacto (o adherente) de* M *si en cualquier bola* $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ *hay al menos un elemento de* M. *Así mismo, diremos que* x *es un punto de acumulación (o punto límite) de* M *si en cualquier bola* $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ *hay al menos un elemento de* M *distinto de* x*, o equivalentemente, en cada bola* $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ *hay infinitos elementos de* M. *Un punto* x *se denomina aislado de* M *si existe una bola* $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ *que no contiene ningún elemento* M *excepto el propio* x.

Nótese que si $x \in M$, entonces obviamente x es un punto de contacto de M. En particular, todo punto interior de M es un punto de contacto. Además, todo punto interior es obviamente un punto de acumulación. Por otro lado, x es un punto de acumulación de M si y sólo si es un punto de contacto de $M \setminus \{x\}$. De lo anterior se deduce que los puntos de contacto de M o bien son puntos límites, o bien son aislados. De hecho, si $x \in \mathbb{X}$ y no es de acumulación, entonces es aislado.

Proposición 3.2.10 *Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos límites.*

Definición 3.2.11 *Dado un subconjunto* $M \in \mathbb{X}$*, se denomina clausura de* M *al conjunto* $\overline{M}$ *de los elementos de* M *y sus puntos de contacto.*

De la definición anterior se sigue que $\overline{M} = M \cup \{$conjunto de sus puntos límites$\}$. De hecho muchos textos definen la clausura de M al conjunto de de los elementos de M y sus puntos límites.

Por ejemplo, si $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pues todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Q}$ (¿por qué?).

Proposición 3.2.12 *Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Luego, como $M \subset \overline{M}$, entonces $\overline{M}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a M.*

Definición 3.2.13 *Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si su diámetro $d(M) = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x,y)$ es finito.*

Está claro que si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, los conjuntos $(0,1)$ y $[-2,1)$ son acotados.

3.3. Aplicaciones en espacios métricos

Definición 3.3.1 *Por aplicación (operador) o función entenderemos una regla T que le hace corresponder a cada elemento del subconjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un único elemento del espacio métrico $\mathbb{Y}$. Así, $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = Tx$ o $y = T(x)$, donde $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$. Al conjunto $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ se le denomina dominio de la aplicación.*

Definición 3.3.2 *Si a cada $x \in \mathcal{D}(T)$ le corresponde un valor $y = Tx \in \mathbb{Y}$ diremos que Tx es la imagen de x según T. Al conjunto de todas las imágenes Tx le denominaremos imagen de T y le denotaremos por $\mathcal{I}(T)$.*

Definición 3.3.3 *La imagen inversa de $y \in \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$. La imagen inversa de un subconjunto $M \subset \mathbb{Y}$ es el conjunto de todas las $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = y$ para todos $y \in M$.*

La imagen inversa de un elemento $y \in \mathbb{Y}$ puede ser el conjunto vacío, un único punto (elemento) de $\mathcal{D}(T)$ o un subconjunto $M \subset \mathcal{D}(T)$.

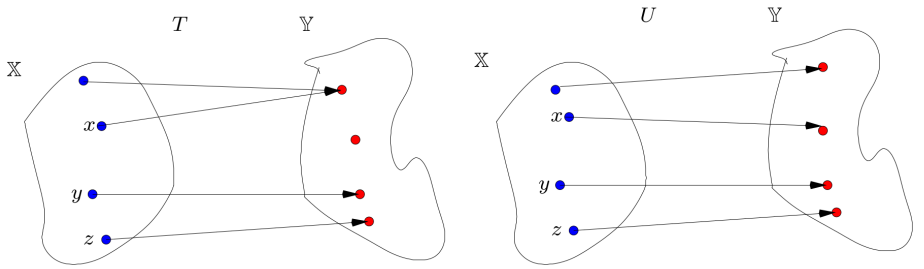


Figura 3.1: Aplicaciones $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y $U : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. U es inyectiva y T no lo es.

Definición 3.3.4 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama sobreyectiva si todo elemento y de $\mathbb{Y}$ es imagen de algún elemento x del dominio, es decir T es tal que*

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \quad \exists x \in \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx = y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}(T) \equiv \mathbb{Y}.$$

Definición 3.3.5 *Una función se llama inyectiva si todo elemento y de la imagen de T es imagen a lo sumo de uno y sólo un elemento x del dominio. Es decir $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es tal que*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{I}(T), \text{ tales que } y_1 = Tx_1 = y_2 = Tx_2, \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

O, equivalentemente, si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene $Tx_1 \neq Tx_2$.

Es decir una función inyectiva es tal que diferentes puntos tienen diferentes imágenes y por tanto la imagen inversa de cada $y \in \mathcal{I}(T)$ es un único elemento de $\mathcal{D}(T)$.

Definición 3.3.6 *Una aplicación inyectiva y sobreyectiva se denomina biyectiva.*

Es decir una aplicación es sobreyectiva si, para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene al menos una solución, e inyectiva si la ecuación anterior tiene o bien una única solución, o bien no tiene solución. Así mismo, T es biyectiva si para todo $y \in \mathbb{Y}$, la ecuación $Tx = y$ tiene una y sólo una solución.

Para las funciones inyectivas se puede definir la aplicación inversa.

Definición 3.3.7 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva. Definiremos su aplicación inversa T^{-1} a la aplicación $T^{-1} : \mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ tal que a cada elemento $y \in \mathcal{I}(T)$ le hace corresponder un único $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx = y$, i.e., $x = T^{-1}y$.*

Para mostrar conceptos anteriores mostraremos algunos ejemplos con funciones reales.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es inyectiva pues para $f(x) = 4$, por ejemplo, existen dos valores de x del domino tales que $f(x) = 4$, ellos son $x = -2$ y $x = 2$. Esta función tampoco es sobreyectiva pues para $y = -1$ no existe ningún x del dominio tal que $f(x) = -1$ ($f(x) = -1 \iff x^2 = -1$). Un ejemplo de función sobreyectiva es $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$. La función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva pues a cada $y \in f(A)$ le corresponde una $x \in [0, +\infty)$ tal que $f(x) = y$. Dicha x es $x = \sqrt{y}$. Por tanto la función $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tiene inversa y ficha inversa es $f^{-1} : [0, +\infty) \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Definición 3.3.8 (Composición de aplicaciones) *Sean $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$ y $U : \mathcal{D}(U) \subset \mathbb{Y} \mapsto \mathcal{I}(U) \subset \mathbb{Z}$ dos aplicaciones tales que $\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{D}(U)$. Entonces definiremos la aplicación $U \circ T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$ y la denominaremos aplicación compuesta de U y T a la aplicación que le hace corresponder a cada $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ un elemento $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z = U(Tx)$ ($z = UTx$).*

En general $UTx \neq TUx$, de hecho que exista $U \circ T$ no implica que exista $T \circ U$.

Por ejemplo: sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Es evidente que la imagen de f está contenida en el dominio de g, por tanto podemos definir la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2.$$

Además, la imagen de g también está contenida en el dominio de f, por lo que podemos definir la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

Nótese que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. De hecho que exista $(f \circ g)(x)$ no implica que exista $(g \circ f)(x)$. Por ejemplo: $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, para las cuales tenemos $(f \circ g)(x) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$ pero $(g \circ f)(x)$ no existe.

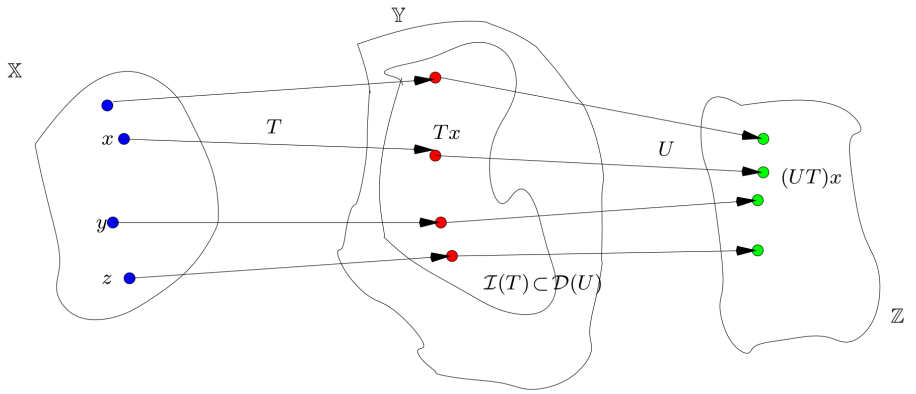


Figura 3.2: Composición de funciones $f \circ g$ de $f : A \mapsto C = f(A) \quad g : B \mapsto D$, $C = f(A) \subset B$.

Nota 3.3.9 *De las definiciones 3.3.7 y 3.3.8 se sigue que si una aplicación T es invertible, entonces $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{Y}}$ y $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{X}}$, donde $I_{\mathbb{Z}}$ es el operador identidad $I : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $Iz = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} = \mathbb{X}$ o $\mathbb{Y}$).*

Definición 3.3.10 *La restricción de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $T|_B$ que se obtiene de T cuando x se restringe al conjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$. La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ a un subconjunto $C \supset \mathcal{D}(T)$ es la aplicación $\widetilde{T}$ tal que $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, i.e., $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Definición 3.3.11 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que[2] $\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Se dice que T es continua en todo $M \subset \mathcal{D}(T)$ si T es continua en todo $x \in M$.*

Proposición 3.3.12 *Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{Y}$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{X}$.*

[2]Aquí ρ denota la métrica de $\mathbb{X}$ y σ la de $\mathbb{Y}$.

3.4. Espacios métricos separables

Como ya hemos comentado, un espacio métrico puede contener *muchos* o *pocos* elementos. Es fácil intuir que en un espacio con *pocos* elementos es en general más sencillo para trabajar que en uno con muchos. Un ejemplo de ello es $\mathbb{R}$. Cuando trabajamos con números reales estos pueden ser racionales $\mathbb{Q}$ o irracionales $\mathbb{I}$. En el primer caso es sencillo operar con ellos en la práctica, pero en el segundo es formalmente imposible pues para representar un irracional necesitamos un número infinito de decimales. Sin embargo en los cursos de análisis matemático elementales se prueba que dado un irracional (en general de un real) cualquiera siempre se puede encontrar un racional que tan cerca como se quiera. Esta propiedad se conoce como la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Pero aparte de esta ventaja indudable de los racionales frente a los irracionales hay otra más: el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los racionales es numerable mientras que el de los irracionales (y por tanto $\mathbb{R}$) no lo es. En esta sección trataremos estas cuestiones para un espacio métrico general.

Definición 3.4.1 *Sea $M \subset \mathbb{X}$ un subconjunto de $\mathbb{X}$. Se dice que M es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura coincide con M, i.e., $\overline{M} = \mathbb{X}$.*

De la definición anterior se infiere que si M es denso $\mathbb{X}$ entonces cualquiera sea la bola $B(x, \epsilon)$ (por pequeño que sea $\epsilon > 0$) siempre contiene puntos de M. En otras palabras, cualquiera sea $x \in \mathbb{X}$, siempre tiene elementos de M tan cerca como se quiera.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ pues como ya hemos visto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definición 3.4.2 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ es separable si contiene un subespacio numerable*[3] *$M \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.*

Así pues, $\mathbb{R}$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.4.3 *Prueba que $\mathbb{C}$ es separable.*

[3]Un conjunto M cualquiera se denomina *numerable* si se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de M y los números naturales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es. Para más detalle ver el apartado 1.4.1.

Ejemplo 3.4.4 *El espacio métrico trivial del ejemplo 3.1.2 es separable si y sólo si el propio espacio $\mathbb{X}$ es numerable.*

Ejemplo 3.4.5 *El espacio ℓ^2 del ejemplo 3.1.12 con $p = 2$, es separable.*

Ejemplo 3.4.6 *El espacio ℓ^∞ (ver ejemplo 3.1.11) no es separable.*

Ejercicio 3.4.7 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico separable y sea $M \subset \mathbb{X}$. Prueba que M también es separable.*

Antes de discutir el concepto de convergencia en espacios métricos conviene hablar de otro tipo muy especial de conjuntos: los conjuntos raros o densos en ninguna parte.

En la definición 3.4.1 vimos que un un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso (en todas partes) en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$. Esto implica que si M no es denso en $\mathbb{X}$, entonces $\overline{M} \neq \mathbb{X}$, por lo que $\overline{M}$ dejará sin rellenar algún entorno (abierto) de $\mathbb{X}$. Sin embargo hay otros conjuntos que también es conveniente conocer. Así tenemos la siguiente:

Definición 3.4.8 *Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro o denso en ninguna parte si su clausura $\overline{M}$ no contiene ningún entorno, i.e., el interior de $\overline{M} = \emptyset$.*

En otras palabras, un conjunto M es raro si su clausura $\overline{M}$ no contiene puntos interiores. Ello implica que cualquier entorno de $\mathbb{X}$ contiene una bola que es disjunta de con M. A diferencia de los conjuntos no densos en general, los no raros son tales que su clausura tienen que rellenar algún entorno de $\mathbb{X}$ pero no necesariamente todo el espacio.

Nótese que si M es cerrado, entonces $M = \overline{M}$, por tanto si un conjunto cerrado no contiene ningún entorno, entonces es denso en ninguna parte. En efecto, si M no fuese raro, entonces $\overline{M}$ contendría un entorno, pero como $M = \overline{M}$, M contendría un entorno lo que es una contradicción.

Proposición 3.4.9 *Sea M un abierto. Entonces $\overline{M} \setminus M$ es raro.*

Proposición 3.4.10 *Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es raro si y solo si $\mathbb{X} \setminus \overline{M}$ es denso en $\mathbb{X}$, i.e., $\overline{\mathbb{X} \setminus \overline{M}} = \mathbb{X}$.*

Definición 3.4.11 *Un conjunto formado por la unión numerable de conjuntos raros se denomina de primera categoría o magro. Si un conjunto no es de primera categoría, entonces se dice que es de segunda categoría.*

Por ejemplo, si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, cualquier conjunto finito de puntos es raro (y por tanto de primera categoría), el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, $(-1, 2]$ es de segunda categoría.

Aunque no es es nuestro objetivo tratar demasiado este tipo de cuestiones conviene mostrar un ejemplo de lo sutil que pueden llegar a ser estos conceptos. Como mencionamos antes, un conjunto numerable de puntos de $\mathbb{R}$ (por ejemplo los números naturales) es de primera categoría. El siguiente ejemplo muestra que no siempre es así. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ y elijamos la métrica habitual de $\mathbb{R}$. Es obvio que los entornos (bolas) de Ω de radio menor que 1 son puntos únicos y, por tanto, el único subconjunto no vacío de Ω que es denso en ninguna parte es conjunto vacío, es decir, cualquier subconjunto de Ω es necesariamente de segunda categoría.

Para terminar conviene hacer notar que el conjunto vacío $\emptyset$ es denso en ninguna parte (la palabra *raro* le viene muy bien), por tanto es de primera categoría, luego, un conjunto de segunda categoría tiene que tener elementos. Esa es una importante propiedad de estos conjuntos: si probamos que un conjunto es de segunda categoría entonces sabemos que dicho conjunto contiene elementos.

3.5. Convergencia en espacios métricos

En esta sección estudiaremos en concepto de convergencia en espacios métricos y alguna de sus consecuencias.

Definición 3.5.1 *Dada una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$, diremos que $(x_n)_n$ es acotada si existe un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ acotado tal que $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lo anterior es equivalente a que exista un $x \in \mathbb{X}$ y un número $K > 0$ tal que $\rho(x, x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.5.2 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ es convergente, y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, si existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es divergente.*

Nótese que en la propia definición de límite está explícito que el límite ha de ser un elemento de $\mathbb{X}$. Por ejemplo, sea $\mathbb{X}$ el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$. La sucesión $x_n = 1/(n+1)$ no tiene límite en $\mathbb{X}$ ya que claramente $1/(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ pero $0 \notin (0, 1)$.

Una consecuencia de la propia definición es que, si existe el límite, este es único.

Ejercicio 3.5.3 *Da una interpretación* geométrica (topológica) *del concepto de límite en un espacio métrico cualquiera.*

Gracias al concepto de convergencia podemos dar una caracterización analítica muy elegante de los conjuntos cerrados.

Proposición 3.5.4 *Sea M un subespacio no vacío de un espacio métrico $\mathbb{X}$, y sea $\overline{M}$ su clausura. Entonces*

a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M (i.e., $\forall n,\ x_n \in M$) tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b) M es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implica que $x \in M$.

Definición 3.5.5 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina (secuencialmente) compacto si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Entenderemos que $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto como subconjunto de $\mathbb{X}$, i.e., cualquier $(x_n)_n$ de elementos de M tiene una subsucesión convergente en M.

Ejercicio 3.5.6 *Prueba que el espacio métrico discreto del ejemplo 3.1.2 constituido por infinitos puntos no es compacto. (**Ayuda:** Basta escoger una sucesión de elementos distintos.)*

Lema 3.5.7 *Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.*

El recíproco, en general, es falso.

Recordemos que una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua –ver la definición 3.3.11– en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que $\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. T es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in M$.

Ejercicio 3.5.8 *Prueba que la definición de continuidad 3.3.11 en un punto es equivalente a la siguiente definición por sucesiones: T es continua en x_0 si para cualquier sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, se tiene que $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0$.*

Teorema 3.5.9 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Entonces la imagen de M, $T(M)$ también es un conjunto compacto. I.e., las aplicaciones continuas transforman compactos en compactos.*

Corolario 3.5.10 *Sea una aplicación continua $T : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ de un compacto M en los reales. Entonces T alcanza su máximo y su mínimo absolutos.*

Este corolario es una generalización del teorema de Weierstrass para las funciones continuas.

3.5.1. Espacios métricos completos

Definición 3.5.11 *Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de Cauchy o fundamental si existe para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

En $\mathbb{R}$ toda sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. Esta propiedad fundamental de $\mathbb{R}$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$. Por ejemplo, si escogemos nuevamente $\mathbb{X}$ como el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica habitual de $\mathbb{R}$, la sucesión $x_n = 1/(n+1)$, que es de Cauchy (¿por qué?) no tiene límite en $\mathbb{X}$.

Definición 3.5.12 *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge (a un elemento de $\mathbb{X}$).*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$, es completo. También lo es $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ con la métrica usual de $\mathbb{C}$. Sin embargo $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, es incompleto (¿por qué?), y el conjunto $\mathbb{X} = (0, 1)$ de antes también lo es.

Proposición 3.5.13 *Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente de elementos de un espacio métrico $\mathbb{X}$. Entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy.*

Teorema 3.5.14 *Un subespacio M de un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Ejemplo 3.5.15 *El espacio métrico ℓ^2 del ejemplo 3.1.12 ($p = 2$) es completo. De hecho, el espacio ℓ^p, $p \geq 1$ es completo.*

Ejemplo 3.5.16 *El espacio $C^2_{[a,b]}$ del ejemplo 3.1.10 no es completo.*

Ejemplo 3.5.17 *El espacio métrico $C_\infty([a, b])$ del ejemplo 3.1.9 es completo.*

Definición 3.5.18 *Sea sucesión de esferas (bolas cerradas) $(S_n(x_n, r_n))_n$, $S_n(x_n, r_n) \subset \mathbb{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$S_1(x_1, r_1) \supset S_2(x_2, r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n, r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1}, r_{n+1}) \supset \cdots .$$

se denomina sucesión de esferas (cerradas) encajadas.

Teorema 3.5.19 (De las esferas encajadas) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. Entonces, $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$.*

Ejercicio 3.5.20 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es completo, entonces la $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$, con $r_n \to 0$, contiene un único punto. (**Ayuda:** Usa el teorema anterior y reducción al absurdo).*

Apliquemos el teorema anterior al espacio métrico $\mathbb{R}$. Como sabemos $\mathbb{R}$ es completo, luego toda sucesión de esferas encajadas, en este caso los intervalos cerrados $[x_n - r_n, x_n + r_n]$, tales que $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tienen al menos un punto en común $\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n - r_n, x_n + r_n] \neq \emptyset$. De hecho tienen uno y sólo uno. Lo anterior no es más que el Teorema de los intervalos encajados de Cantor en $\mathbb{R}$.

Nota 3.5.21 *En el Teorema de las esferas encajadas 3.5.19 se puede cambiar la condición de que los radios de las esferas tiendan a cero por que las esferas sean compactas.*

Definición 3.5.22 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación inyectiva del espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ al espacio métrico $(\mathbb{Y}, \sigma)$. Diremos que T es una isometría si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \qquad \rho(x_1, x_2) = \sigma(Tx_1, Tx_2).$$

Esto tiene una implicación muy importante: Si dos espacios son isométricos, entonces las distancias de los elementos originales y de sus imágenes según T son las mismas, es decir los espacios sólo difieren por la naturaleza del conjunto $\mathbb{X}$ pero son *idénticos* según la métrica. En particular los conceptos *topológicos* (entorno, cercanía, etc) son los equivalentes en ambos espacios.

Definición 3.5.23 *Sea $(\mathbb{X}, \rho)$ un espacio métrico y sea $(\overline{\mathbb{X}}, \rho)$ su clausura. Llamaremos completamiento de $\mathbb{X}$ al espacio métrico completo $\mathbb{X}^*$ tal que $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^*$ y $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$.*

Por ejemplo, el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ es el completamiento del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.5.24 *¿Cuál es el completamiento del espacio $(0, 1)$ discutido anteriormente?*

Teorema 3.5.25 *Todo espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ tiene un completamiento. Dicho completamiento es único salvo isometrías. Es decir, si $\mathbb{X}^*$ y $\mathbb{X}^{**}$ son dos completamientos de $\mathbb{X}$, entonces existe una aplicación $T : \mathbb{X}^* \mapsto \mathbb{X}^{**}$, $x^{**} = Tx^*$ tal que $Tx = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(Tx^*, Ty^*)$.*

La demostración de este Teorema se puede encontrar, por ejemplo, en las monografías [5, 6].

3.5.2. El Teorema del punto fijo

Definición 3.5.26 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. Si existe un $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

Ejercicio 3.5.27 *Prueba que toda aplicación de contracción es continua.*

Definición 3.5.28 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. El punto $x \in \mathbb{X}$ se denomina punto fijo de T si $Tx = x$.*

Teorema 3.5.29 (Del punto fijo) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.*

Corolario 3.5.30 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces cualquiera sea el elemento $x_0 \in \mathbb{X}$ la sucesión x_0, $x_1 = Tx_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1}, \ldots$, tiene un único punto límite que coincide con el punto fijo de T. Además, $\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$.*

Ejemplo 3.5.31 Como ejemplo *sencillo* consideremos las funciones reales en $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tales que para todos x_1 e x_2 de $[a, b]$ se satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \qquad K \in (0, 1).$$

Entonces, f es una aplicación de contracción y por el Teorema del punto fijo la sucesión

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \ldots$$

converge a un único límite x tal que $x = f(x)$. En particular, f satisface la condición de Lipschitz si f es diferenciable y $|f'(x)| \leq K < 1$ en $[a, b]$.

Definición 3.5.32 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión*[4] *de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge puntualmente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si para todo $x \in M$ la sucesión $(T_n x)_n$ es convergente, i.e., para cada $x \in M$ $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx = y \in \mathbb{Y}$.*

[4] Se asume que todos los operadores T_n tienen el mismo dominio $\mathcal{D}(T_n)$.

En otras palabras

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in M \quad \exists N := N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N \;\Rightarrow\; \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Está claro de la definición anterior que el número N depende no sólo del valor de ϵ sino también del elemento x. Para diferentes x tendremos en general diferentes N.

Definición 3.5.33 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de aplicaciones $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathcal{D}(T)$. Diremos que T_n converge uniformemente en M a $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}; \quad \forall n > N \text{ y } \forall x \in M \;\Rightarrow\; \rho(T_n x, Tx) < \epsilon.$$

Es decir, fijado el $\epsilon > 0$, podemos escoger un N tal que la desigualdad $\rho(T_n x, Tx) < \epsilon$ es cierta en todo el subconjunto M.

Una aplicación del teorema del punto fijo

El teorema del punto fijo se puede usar para probar el siguiente:

Teorema 3.5.34 (Picard) *Sea $f(x, y)$ una función continua en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0) y satisface la condición de Lipschitz en y, i.e.,*

$$\exists K > 0;\ \forall x, y, \tilde{y} \in \Omega,\ |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}|,$$

entonces existe un δ-entorno de x_0, donde el problema de valores iniciales

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

tiene solución única.

Nótese que del corolario 3.5.30 se sigue que la solución del problema de valores iniciales puede ser aproximada mediante la sucesión

$$\begin{aligned}
y_0(x) =& y_0, \\
y_1(x) =& y_0 + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt, \\
&\vdots \\
y_n(x) =& y_0 + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

conocida como sucesión de Picard.[5]

[5] Compárese con lo discutido en el apartado 2.2.

3.6. El teorema de las categorías de Baire

Vamos a terminar este capítulo con un teorema importante relacionado con los espacios métricos completos que nos será de utilidad más adelante.

Teorema 3.6.1 (Baire) *Un espacio métrico $\mathbb{X} \neq \emptyset$ completo es de segunda categoría.*

Corolario 3.6.2 *Sea $\mathbb{X} \neq \emptyset$ un espacio métrico completo. Supongamos que*

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \qquad M_k \subset \mathbb{X} \text{ conjuntos cerrados}.$$

Entonces al menos un M_k contiene un abierto no vacío (un entorno).

Dos aplicaciones "sencillas" al análisis clásico

El teorema de Baire nos será de gran utilidad para probar algunos teoremas clásicos del análisis funcional como veremos más adelante. No obstante, en este apartado veremos dos ejemplos *sencillos* de aplicación al análisis clásico.

Ejemplo 1. No es complicado probar que existen funciones continuas en los irracionales y discontinuas en los racionales de para distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$ (ver por ejemplo el problema 3.21). ¿Y al contrario? Es decir, ¿existen funciones continuas en los racionales y discontinuas en los irracionales? La respuesta es no. No existen funciones definidas en $[0,1]$ que sean continuas en cada racional de $(0,1)$ y discontinuas en cada irracional de $(0,1)$.

Para probar este resultado se necesitan de ciertas definiciones previas.

Sea $a \in I \subset \mathbb{R}$, I abierto, $I_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \subset I$. Definamos las cantidades

$$\omega(f, I) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|, \quad \omega(f, a) = \lim_{\delta \to 0} \omega(f, I_\delta(a)),$$

conocidas como *oscilación* de f en en abierto I y el punto $a \in I$, respectivamente. Es claro que para todo abierto $U \subset I$, $\omega(f, U) \leq \omega(f, I)$, luego $\omega(f, a) \leq \omega(f, I_\delta(a)) \leq \omega(f, I)$.

Es sencillo ver que una función f es continua en $x = a$ si y solo si $\omega(f, a) = 0$. Por otro lado, el conjunto $U(x, \epsilon)$ de las $x \in I$ tales que $\omega(f, x) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ es abierto. Para ello tomemos $\epsilon > 0$ y sea $x_0 \in U(x, \epsilon)$.

Ejemplo 2. Sea $C^{\infty}_{[0,1]}$ el espacio métrico de las funciones continuas en $[0, 1]$ con la métrica del $\rho(f, g) = \text{máx}_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Como ya vimos (ver ejemplo 3.5.17) este espacio es completo. Sea A el espacio de las funciones continuas que tienen al menos en un punto una derivada lateral finita. Entonces que A es un conjunto de primera categoría. Es decir, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.6.3 *El conjunto de todas las funciones continuas que no tienen ninguna derivada lateral finita en ningún punto del intervalo* $[0, 1]$ *es de segunda categoría.*

O sea, las funciones con las que estamos acostumbrados a trabajar en el análisis constituyen un conjunto magro.

La idea de la demostración de este teorema consiste en construir la familia de subconjuntos E_n de las funciones continuas $f \in C_{[0,1]}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n, \ \forall h \in (0, 1/n), \text{ para algún } x \in [0, 1-1/n] \right\}.$$

Probar que E_n es cerrado para todo n y que $\overline{C_{[0,1]} \setminus E_n} = C_{[0,1]}$, lo que implica que E_n es raro. Luego hay que usar el Teorema de Baire 3.6.1.

Conclusión, existen funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto, y dado que el conjunto de esas funciones es de segunda categoría ello implica que dichas funciones *monstruos* son las más comunes en el análisis.

De manera similar se puede probar que no existen funciones definidas en $[0, 1]$ que sean continuas en cada racional de $[0, 1]$ y discontinuas en cada irracional de $[0, 1]$. Cuestión que dejamos como ejercicio[6] al lector.

[6]Ver, por ejemplo, [8, Teorema 6.6, pág. 149].

3.7. Problemas

Problema 3.1 Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\, a + \frac{1}{q}\, b, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.7.1}$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda**: Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Problema 3.2 Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.7.2}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c\, y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Young.

Problema 3.3 Prueba la desigualdad de Minkowski (3.1.1) a partir de la desigualdad de Hölder (3.7.2).

Problema 3.4 Encontrar los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, con $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$ y probar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Deduce a partir de este resultado las desigualdades análogas a las desigualdades de Young (3.7.1), de Hölder (3.7.2) y Minkowski (3.1.1), respectivamente.

Problema 3.5 Extiende a las series infinitas las desigualdades de Hölder

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.7.3}$$

y Minkowski (3.1.2), respectivamente, donde $(x_i)_i$ y $(y_i)_i$ son sucesiones de números no-negativos. Se asume que las sucesiones son tales que las correspondientes series son convergentes.

Problema 3.6 Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$. Usando la desigualdad de Young (3.7.1) prueba las desigualdades de Hölder

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \ p > 1, \tag{3.7.4}$$

donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y Minkowski

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ p > 1.$$

¿Son ciertas estas igualdades si f y g son integrables?

Problema 3.7 Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente. Prueba que

1. $(x_n)_n$ es acotada.
2. El límite de $(x_n)_n$ es único.
3. Si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x,y)$, es decir, la aplicación $\rho : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ es continua. **Ayuda:** Usa que $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x,y) + \rho(y, y_n)$.

Problema 3.8 Es conocido que en $\mathbb{R}$ de toda sucesión acotada se puede construir (extraer) una subsucesión convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Sea ahora $\mathbb{X}$ un espacio métrico arbitrario y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de $\mathbb{X}$. ¿Se puede construir (extraer) de $(x_n)_n$ una subsucesión convergente? Justifica la respuesta.

Problema 3.9 Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{X}$. ¿Se puede extraer de $(x_n)_n$ una subsucesión convergente (es decir, ¿es cierto el Teorema de Bolzano-Weierstrass para los espacios métricos completos?). Justifica tu respuesta. ¿Qué ocurre si $\mathbb{X}$ no es completo?

Problema 3.10 Sea $(x_n)_n$ una sucesión fundamental (de Cauchy) de elementos de un espacio métrico $\mathbb{X}$.

1. Prueba que $(x_n)_n$ es acotada.

2. Sea $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$. Prueba que si $(x_{n_k})_k$ converge a x, entonces $(x_n)_n$ también converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Problema 3.11 Prueba que el espacio métrico trivial del ejemplo 3.1.2 es completo.

Problema 3.12 Prueba que los espacios métricos de los ejemplos 3.1.5–3.1.7 son completos. ¿Y el del ejemplo 3.1.8?

Problema 3.13 Prueba que el espacio métrico ℓ^∞ del ejemplo 3.1.11 es completo.

Problema 3.14 Prueba que los espacios métricos definidos en el ejemplo 3.1.5–3.1.7 y 3.1.12 son separables. **Ayuda**: Usa los subespacios definidos mediante los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $q_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ para los espacios de los ejemplos 3.1.5–3.1.7 y los subespacios definidos por los vectores $y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en el espacio del ejemplo 3.1.12 ($p \geq 1$) y prueba que son numerables y densos en los correspondientes espacios métricos.

Problema 3.15 Prueba que el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica discreta (ver ejemplo 3.1.2) no es separable.

Problema 3.16 Prueba que el espacio métrico definido en el ejemplo 3.1.13 es separable y completo.

Problema 3.17 Sea $B(a, b)$ el conjunto de todas las funciones acotadas (no necesariamente continuas) en $[a, b]$. Prueba que $B(a, b)$ es un espacio métrico con la métrica $\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Prueba que dicho espacio no es separable. **Ayuda:** Sea el conjunto de todas las funciones $f_t(x) = 0$ para $0 \leq x < t$ y $f_t(x) = 1$ para $t \leq x \leq b$, $t \in [a, b]$. Prueba que dicho conjunto no es numerable. Calcula la distancia entre dos funciones cualesquiera de dicho conjunto y razona como en el Ejemplo 3.4.6.

Problema 3.18 Estudia bajo que condiciones (sobre los $a_{i,j}$) la aplicación $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por el sistema de ecuaciones

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

es de contracción en los siguientes casos

1. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.5.
2. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.6
3. Si usamos la métrica del ejemplo 3.1.8

Problema 3.19 Utiliza el Teorema del punto fijo para probar que el problema de valores iniciales asociado al sistema de ecuaciones diferenciales

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), i = 1, \ldots, n, \; y_1(x_0) = (y_1)_0, \ldots, y_n(x_0) = (y_n)_0,$$

tiene solución única en cierto δ-entorno de x_0. Asumir que las funciones f_i son continuas en cierta región Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene al punto $(x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$, y que se satisfacen una condición de Lipschitz de la forma

$$\exists K > 0; \; \forall x, y_i, \tilde{y}_i \in \Omega, \; |f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)| \leq K \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - \tilde{y}_i|.$$

Problema 3.20 Sea la ecuación integral de Fredholm de 2º tipo

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x),$$

donde el *núcleo* $K(x, y)$ de la ecuación integral y g son funciones conocidas y continuas en el cuadrado definido por las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$. Prueba que en el espacio $C_{[a,b]}$ con la métrica $\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ (ver ejemplo 3.1.9) la ecuación anterior tiene una única solución si $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$, donde M es el máximo de la función $K(x, y)$. **Ayuda:** Utiliza el Teorema del punto fijo.

Problema 3.21 Prueba que la función $f(x)$ definida sobre $(0, 1)$ tal que $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ (fracción reducida) e igual a 0 si x es irracional es continua en cada irracional de $(0, 1)$ y discontinua en cada racional de $(0, 1)$.

Problema 3.22 El Teorema de Baire 3.6.1 se puede probar a partir del Teorema de las esferas encajadas 3.5.19 para ello hay que una sucesión apropiada de esferas encajadas. Ello se puede hacer razonando de la misma forma que en la prueba presentada en el apartado 3.6 y mostrado que existe una esfera S_k tal que $S_k \subset B_k$ pero que no está contenida en B_{k+1}. Usar esta idea para dar una prueba alternativa del Teorema de Baire 3.6.1.

Teoremas, Proposiciones y Problemas para el examen

Teoremas principales: Teorema de las esferas encajadas 3.5.19, Teorema de Baire 3.6.1.

Resultados importantes: 3.1.15, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.10, 3.2.12, 3.3.12, 3.4.7, 3.4.10, 3.5.4, 3.5.7, 3.5.9, 3.5.14, 3.5.29, 3.5.34, 3.6.3.

Problemas y ejercicios: Probar que los pares $(\mathbb{X}, \rho)$ de los ejemplos 3.1.7, 3.1.9, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.12, 3.1.13, son espacios métricos. Probar los resultados 3.4.4, 3.4.5. 3.4.9, 3.5.8, 3.5.13, 3.5.15, 3.5.16, 3.5.17, 3.5.20. Problemas: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.10, 3.11, 3.13, 3.16, 3.18, 3.20.

Capítulo 4

Espacios normados y espacios de Banach

4.1. Espacios vectoriales

Definición 4.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un conjunto de elementos cualesquiera y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. Definiremos en $\mathbb{V}$ las operaciones* suma "+" *de dos elementos x, y de $\mathbb{V}$ y* multiplicación "$\cdot$" *de un elemento de $\mathbb{V}$ por un número (real o complejo) $\alpha \in \mathbb{K}$ por un elemento de $\mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (real o complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respectivamente), si se cumplen las siguientes propiedades (axiomas):*

1. *Para todos x e y,* vectores *de $\mathbb{V}$, el vector suma, $w = x + y$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y, z \in \mathbb{V}$ se cumple que:*

   a) $x + y = y + x$

   b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

   c) *Existe un elemento "nulo" de $\mathbb{V}$, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*

   d) *Cualquiera sea el vector x de $\mathbb{V}$, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

2. *Para todo x* vector *de $\mathbb{V}$, el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar, $w = \alpha \cdot x$, también es un vector de $\mathbb{V}$ y para todos $x, y \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple que:*

   a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

d) $1 \cdot x = x$

Ejemplos.

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

2. El conjunto de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^{m\times n}$.

3. El conjunto de los polinomios reales[1] de grado a lo sumo n, que denotaremos por $\mathbb{P}_n$, o sea,

$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad a_0, ..., a_n \text{ números reales.}\},$$

donde definiremos la suma de dos polinomios y la multiplicación por un escalar de la siguiente forma:

$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad q(x) = b_0 + b_1\, t + \cdots + b_n\, t^n,$$

$$(p+q)(t) := p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

$$(\alpha \cdot p)(t) := \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

4. El conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $C_{[a,b]}$, cuando la suma de dos funciones f y g y la multiplicación por un escalar α están dadas por

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad (\alpha \cdot f)(t) := \alpha \cdot f(t).$$

Definición 4.1.2 *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto $H \subset \mathbb{V}$ de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones* suma "+" *y* multiplicación "·" *que* $\mathbb{V}$.

[1] De forma totalmente análoga se puede definir para el caso complejo.

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = \mathbb{V}$ (el mismo espacio vectorial).

2. Para $\mathbb{V} = C_{[a,b]}$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$ entero no negativo.

3. Para $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Ejercicio 4.1.3 *Prueba que los espacio ℓ^∞ y ℓ^p ($p \geq 1$) de los ejemplos 3.1.11 y 3.1.12, respectivamente, son espacios vectoriales.*

Que la suma $x + y \in \ell^\infty$ es inmediato. Para el caso de ℓ^p se sigue de la desigualdad de Minkowski (3.1.2). Para la multiplicación por un escalar es inmediato. Finalmente, se puede comprobar mediante un cálculo directo que en cada caso se cumplen las propiedades de la definición 4.1.1. ■

Teorema 4.1.4 *Un subconjunto H de elementos de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si y sólo si se cumple*[2] *que para todos x e y,* vectores *de H y α, $\beta \in \mathbb{K}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

La demostración es inmediata de la definición de subespacio vectorial.

Definamos ahora la envoltura lineal $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores:

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k \;\middle|\; \alpha_k \in \mathbb{K},\ k = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Usando el teorema anterior se deduce el siguiente

Teorema 4.1.5 *Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el conjunto $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$. Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$.*

[2] Usualmente se impone además que el elemento nulo de $\mathbb{V}$ pertenezca a H, pero eso se deduce de la condición $w = \alpha x + \beta y \in H$ tomando $\alpha = \beta = 0$.

Conjuntos linealmente independientes. Bases.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se denomina linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p = 0,$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ se denomina linealmente dependiente si existen los valores $x_1, x_2, \cdots, x_p$ no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p = 0.$$

Se dice que un conjunto infinito de vectores es linealmente independiente si cualquier subsistema finito del mismo es linealmente independiente. En caso contrario se dice que el sistema es dependiente.

Las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

1. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*

2. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de dos o más vectores de $\mathbb{V}$ con alguno de los vectores $v_i = 0$ $(1 \leq i \leq p)$ es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes, o sea si alguno de los vectores de S es el vector nulo entonces S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

3. *Dos vectores v_1 y v_2 de $\mathbb{V}$ son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real α tal que $v_1 = \alpha v_2$ o $v_2 = \alpha v_1$*

Los vectores linealmente independientes de un espacio vectorial juegan un papel fundamental en el estudio de los sistemas lineales gracias a la siguiente definición:

Definición 4.1.6 *Dado un subespacio vectorial H del espacio vectorial $\mathbb{V}$ diremos que el conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de $\mathbb{V}$ es una base de H si*

i) B *es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) $H = \operatorname{span}(b_1, b_2, ..., b_p)$*, o sea,* B *genera a todo* H*.*

En particular si H *coincide con* $\mathbb{V}$*, entonces* B *es una base de todo el espacio vectorial* $\mathbb{V}$*.*

Por ejemplo, si tomamos una matriz $n \times n$ invertible, entonces sus columnas $a_1, ..., a_n$ son linealmente independientes y además se tiene que $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. En particular, si $A = I_n$, la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son una base de $\mathbb{R}^n$ la cual se conoce como base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Otro ejemplo lo constituye el conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$. Es fácil comprobar que dichos vectores son linealmente independientes y que $\operatorname{span}(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. S se conoce como la base canónica de $\mathbb{P}_n$.

El siguiente teorema es de gran importancia en las aplicaciones.

Teorema 4.1.7 *Si un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *tiene una base de* n *vectores* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$*, entonces cualquier conjunto con más de* n *vectores de* $\mathbb{V}$ *es linealmente dependiente. Más aún, si un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *tiene una base de* n *vectores* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$*, entonces cualquier otra base de* $\mathbb{V}$ *tendrá que tener* n *vectores de* $\mathbb{V}$*.*

Por tanto el menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio. Dicho número se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Un espacio vectorial es de dimensión finita n si $\mathbb{V}$ está generado por una base de n elementos, es decir si $\mathbb{V} = \operatorname{span}(b_1, ..., b_n)$, donde $B = \{b_1, ..., b_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y lo escribiremos de la forma $\dim V = n$. En el caso que $\mathbb{V} = \{0\}$ sea el espacio vectorial nulo, $\dim\{0\} = 0$. Si $\mathbb{V}$ no puede ser generado por una base finita de vectores, entonces diremos que $\mathbb{V}$ es de dimensión infinita y lo denotaremos por $\dim V = \infty$.

Por ejemplo, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, $\dim C_{[a,b]} = \infty$ y $\dim \ell^p = \infty$.

4.2. Espacios normados y de Banach

Definición 4.2.1 *Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina espacio normado si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. *Para todo $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ y si $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,*
3. *Para todos $x, y \in \mathbb{X}$ se tiene la desigualdad triangular*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{4.2.1}$$

Es evidente que si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos la función $\rho(x, y) = \|x - y\|$, esta satisface los axiomas de la definición 3.1.1, i.e., todo espacio normado es un espacio métrico. La función ρ anterior se denomina métrica inducida por la norma.

Definición 4.2.2 *Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.*

Ejemplo 4.2.3 *$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, es un espacio de Banach.*

Ejercicio 4.2.4 *Prueba que $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) con la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$ es un espacio de Banach ¿Y con la norma $\|x\| = \operatorname{máx}_{k=1,\ldots,n} |x_k|$?*

Ejemplo 4.2.5 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$ y definamos la norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Este espacio es un espacio normado pero no de Banach (¿por qué?).*

Ejemplo 4.2.6 *Sea $\mathbb{X} = C_{[a,b]}$, es decir, el espacio de las funciones continuas definidas sobre el segmento $[a, b]$. Definamos la norma $\|f\| = \operatorname{máx}_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Este espacio es un espacio de Banach.*

Ejemplo 4.2.7 *Sea ahora $\mathbb{X}$ el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ reales (o complejas) tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ con la norma $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. Dicho espacio lo denotaremos por ℓ^p y es un espacio de Banach.*

Ejercicio 4.2.8 *Decide si el espacio $\mathbb{X}$ de todas las sucesiones reales $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ acotadas con la métrica $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, es un espacio de Banach.*

Esta claro que todo espacio normado es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma. Una pregunta inmediata es si el recíproco es cierto, es decir, si todo espacio métrico es normado. Para responder a esta pregunta consideremos el espacio $\mathbb{X}$ de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con la métrica (ver ejemplo 3.1.13)

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Esta métrica no puede ser inducida por ninguna norma ya que de ella nunca podremos obtener la propiedad 2 de la norma. Una forma de verlo es a partir del siguiente lema (cuya demostración es inmediata a partir de la definición de norma):

Lema 4.2.9 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones*

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Los espacios normados son espacios métricos con la métrica ρ inducida por la norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ y or tanto en ellos podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.. Además, al tener una estructura algebraica podemos definir, entre otras cosas, las series:

Definición 4.2.10 *Dada una sucesión de elementos $(x_n)_n$ de un espacio normado $\mathbb{X}$ definiremos la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si s_n converge (en norma) a cierto $s \in \mathbb{X}$, cuando $n \to \infty$, diremos que la serie es convergente en $\mathbb{X}$ y s es su suma. Si converge la serie $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$, diremos que la serie converge absolutamente.

Teorema 4.2.11 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.*

El teorema anterior no es cierto si $\mathbb{X}$ no es completo. Como ejercicio se proponemos al lector que encuentre un contraejemplo.

Ejemplo 4.2.12 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si $\mathbb{X}$ es completo.*

Definición 4.2.13 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.*

Definición 4.2.14 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.*

Ejemplo 4.2.15 *Sea $\mathbb{X}$ el espacio ℓ^p de las sucesiones y sea $(e_n)_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de ℓ^p con 1 en la posición k y 0 en el resto es una base de Schauder.*

Proposición 4.2.16 *Si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.*

El recíproco no es cierto en general. Enflo en 1973 encontró un espacio de Banach, separable que no tiene ninguna base de Schauder.

Finalmente debemos mencionar que todo espacio normado se puede completar y convertirlo en un espacio de Banach. De hecho como consecuencia directa del Teorema 3.5.25 se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.2.17 *Sea $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{X}}$ y una isometría A de $\mathbb{X}$ en $W \subset \widehat{\mathbb{X}}$, tal que W es denso en $\widehat{\mathbb{X}}$. Además, $\widehat{\mathbb{X}}$ es único excepto isometrías.*

4.3. Espacios normados de dimensión finita

Comenzaremos con un lema técnico.

Lema 4.3.1 *Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{4.3.1}$$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema 4.3.2 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.*

Corolario 4.3.3 *Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio de normado (en particular de Banach) $\mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Ejemplo 4.3.4 *Sean los vectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio normado y sea $M = \operatorname{span}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $M \subset \mathbb{X}$ es de dimensión finita y es cerrado. Además, la condición de dimensión finita es esencial. Basta considerar el espacio $C^\infty_{[0,1]}$ del ejemplo 4.2.6 y elegir $M = \operatorname{span}(x_1, x_2, x_2, \cdots)$, donde $x_n := x_n(t) = t^{n-1}$, i.e., M es el espacio de todos los polinomios de cualquier grado. M no es cerrado en $C^\infty_{[0,1]}$ (¿por qué?).*

Definición 4.3.5 *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es equivalente a otra norma $\|\cdot\|'$ si existen dos números reales a, b positivos ($a > 0$, $b > 0$) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Ejercicio 4.3.6 *Prueba que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa. ¿Qué consecuencia tiene esta propiedad?*

Teorema 4.3.7 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$.*

Es decir, en cualquier espacio normado de dimensión finita la convergencia (o divergencia) de sucesiones es independiente de la norma.

Ya vimos en el apartado 3.5 que en un espacio métrico todo subconjunto compacto era cerrado y acotado (lema 3.5.7) y también vimos que el recíproco no es cierto (ver también el problema 4.18). Esta afirmación obviamente es válida para los espacios normados al ser estos espacios métricos con la métrica inducida por la norma. Sin embargo, si el espacio normado es de dimensión finita, entonces todo cerrado y acotado es necesariamente compacto. Así tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.8 *En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita, todo subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto (ver la definición 3.5.5) si y sólo si es cerrado y acotado.*

4.4. Aplicaciones lineales

Gracias a la estructura algebraica de los espacios normados podemos definir un caso particular de gran importancias de los operadores discutidas en el apartado **3.2**: las aplicaciones lineales. Como allí $\mathcal{D}(T)$ denotará el dominio de la aplicación T e $\mathcal{I}(T)$ la imagen de T. Asumiremos que los espacios $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son *espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$) y que tenemos el operador $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$.

Definición 4.4.1 *Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Veamos algunos ejemplos de operadores lineales:

Ejemplo 4.4.2 *El operador identidad $I : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y = Ix = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Ejemplo 4.4.3 *El operador nulo $\Theta : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $y = \Theta x = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Ejemplo 4.4.4 *Sea $\mathbb{P}$ el espacio de los polinomios reales $p(t)$ (o complejos) de cualquier grado. Definamos el operador $D : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}$, $y(t) = Dp(t) = p'(t)$ que denominaremos operador derivación (o derivada).*

Ejemplo 4.4.5 *El operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $y = Tx = A \cdot x$, donde A es una matriz $n \times m$, x e y son los correspondientes vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, y "$\cdot$" denota la multiplicación usual de matrices.*

Ejemplo 4.4.6 *Sea $C_{[a,b]}$ el espacio de las funciones continuas $f(t)$. Definamos el operador $S : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $y(t) = Sf(t) = tf(t)$ que denominaremos operador multiplicación por t.*

Definición 4.4.7 *Llamaremos espacio nulo o núcleo de T al espacio $\mathcal{N}(T)$ de todos los vectores $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = 0$.*

Teorema 4.4.8 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Entonces*

1. *$\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.*
2. *Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) \leq n$.*
3. *$\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$.*

Una pregunta natural e importante que surge al estudiar los operadores lineales es saber cuándo existe el operador inverso. El siguiente resultado responde a dicha cuestión:

Teorema 4.4.9 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal con $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ y $\mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$. Entonces*

1. *Existe la aplicación inversa T^{-1} de T, si y sólo si $Tx = 0$ implica $x = 0$.*
2. *Si existe T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.*
3. *Si T es invertible y $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{D}(T) = n$.*

Ejemplo 4.4.10 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim \mathbb{X} = n < \infty$. Entonces $\dim \mathbb{X} = n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$.*

Ejercicio 4.4.11 *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. Prueba que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ si y sólo si T^{-1} existe. Este resultado no es cierto para dimensión infinita.* ***Ayuda:*** *Usa el resultado del ejemplo anterior.*

Definición 4.4.12 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y sea el operador $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ lineal. T es acotado si existe $c \geq 0$ tal que*[3]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{4.4.1}$$

De lo anterior se sigue que si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0. \tag{4.4.2}$$

El menor valor de c para el cual (4.4.1) se cumple lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina *norma del operador* lineal T. Tomando supremos en $x \neq 0$ en (4.4.2) e ínfimos en c tenemos

$$\sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

De hecho se tiene que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{4.4.3}$$

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Además de (4.4.1), tomando ínfimos en c se sigue que

$$\forall y \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|Ty\| \leq \|T\|\|y\|.$$

Ejercicio 4.4.13 *Prueba que efectivamente la cantidad $\|T\|$ definida en (4.4.3) es una norma, es decir se cumplen los axiomas de la definición 4.2.1.*

Ejemplo 4.4.14 *El operador I del ejemplo 4.4.2 es acotado y $\|I\| = 1$. El operador Θ del ejemplo 4.4.3 es acotado y $\|\Theta\| = 0$. El operador D del ejemplo 4.4.4 es no acotado. En efecto, escojamos el espacio $\mathbb{P}$ en $J = [0, 1]$ e introduzcamos la norma $\|p\| = \max_{t \in J} |p(t)|$. Como $Dp(t) = p'(t)$, entonces si escogemos la sucesión $p_n(t) = t^n$, $\|p_n\| = 1$, tenemos $\|Dp_n\| = n$, luego $\|Dp_n\|/\|p_n\| = n$, que obviamente no es acotada. Finalmente, para el ejemplo 4.4.5 de las matrices, si usamos por ejemplo la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$, entonces*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad c = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2} := \|T\|,$$

donde a_{kj} son los elementos de la matriz A.

[3] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Ejercicio 4.4.15 *Sea el espacio $C^{\infty}_{[a,b]}$ de las funciones continuas con la norma del máximo del Ejemplo 4.2.6. Sea $x(t) \in C^{\infty}_{[a,b]}$ y sean los los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pertenecientes $[a,b]$. Definamos el funcional*

$$f : C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Prueba que f es lineal y acotado y que $\|f\| = l_n := \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

Teorema 4.4.16 *Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.*

Para terminar este apartado probemos el siguiente teorema sobre aplicaciones lineales continuas.

Teorema 4.4.17 *Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal de un espacio normado $\mathbb{X}$ a otro espacio normado $\mathbb{Y}$. Entonces*

1. *T es continuo si y sólo si T es acotado.*
2. *Si T es continuo en algún $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T es continuo en $\mathcal{D}(T)$.*

Nota 4.4.18 *El teorema anterior nos indica que la acotación y continuidad para las aplicaciones lineales son equivalentes.*

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ el espacio de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$. Definamos en dicho espacio la suma de dos aplicaciones $A + B$ y la multiplicación por un escalar λ de la forma habitual:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad (A + B)x = Ax + By, \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

Con esta definición es fácil ver que $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio lineal (el elemento nulo de $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es el operador nulo).

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ el subespacio de todas las aplicaciones lineales acotadas (y por tanto, según el teorema 4.4.17, continuas). Entonces, como consecuencia del ejercicio 4.4.13 se sigue que $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio normado.

Ejercicio 4.4.19 *Prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado y $\mathbb{Y}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio de Banach.*

4.5. El teorema de Banach-Steinhaus

Para terminar este capítulo dedicado a los espacios normados vamos a demostrar un resultado muy útil para una sucesión de operadores lineales y acotados: el teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 4.5.1 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión*[4] *de operadores lineales acotados $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ a otro normado cualquiera $\mathbb{Y}$ tales que la sucesión $(\|T_n x\|)_n$ es acotada para cada $x \in \mathbb{X}$, o sea, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe un $c_x \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se tiene*

$$\|T_n x\| \leq c_x. \tag{4.5.1}$$

Entonces la sucesión de normas $(\|T_n\|)_n$ es acotada, es decir, existe un $c \geq 0$ tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se cumple

$$\|T_n\| \leq c. \tag{4.5.2}$$

Nota 4.5.2 *Este teorema se puede generalizar a una familia de operadores T_i, $i \in I$, no teniendo que ser el conjunto de índices I numerable. Se deja como ejercicio al lector que modifique la prueba para este caso.*

Nótese que la hipótesis (4.5.1) y la consecuencia (4.5.2) del Teorema de Banach-Steinhaus se pueden cambiar por

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty, \ \forall x \in \mathbb{X}, \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty,$$

respectivamente, lo que explica que a este teorema se le suela denominar *Principio de acotación uniforme*, pues se obtiene una cota uniforme para la sucesión de normas $\|T_n\|$ a partir de las cotas puntuales $\|T_n x\|$.

Ejercicio 4.5.3 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ con $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Prueba que si T_n es puntualmente convergente a un operador T (véase la Definición 3.5.32) entonces la sucesión $(T_n)_n$ está uniformemente acotada, i.e.,*

$$\exists c > 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\| < c,$$

y el operador T es lineal y acotado (continuo).

[4] Se asume nuevamente que todos los T_n tienen el mismo dominio $\mathcal{D}(T_n)$.

4.5.1. Aplicación a las series de Fourier

Una aplicación interesante del Teorema de Banach-Steinhaus tiene que que ver con las series de Fourier.

Dada una función $f(x)$ periódica de periodo 2π definiremos la serie trigonométrica de Fourier por

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \tag{4.5.3}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \tag{4.5.4}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, asumiendo que las integrales existen. Una pregunta natural es cuándo, para cada[5] $x \in [0, 2\pi)$, las sumas parciales de la serie de Fourier

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{4.5.5}$$

convergen, y, en ese caso, si $S_n f(x) \to f(x)$ en cada x, es decir si hay convergencia puntual. Nosotros nos ocuparemos de la primera cuestión. Para la segunda el lector puede consultar, por ejemplo, [13, §18.2].

Por ejemplo, encontremos la serie de de Fourier la función $f(x) = 1$ si $0 \le x < \pi$ y 0 si $\pi \le x < 2\pi$. Un cálculo directo nos da $a_0 = 1$,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right).$$

Luego la serie de Fourier de f es

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}. \tag{4.5.6}$$

Usando el criterio de Abel-Dirichlet para series numéricas[6] se puede comprobar que la serie anterior converge en todo punto de $[0, 2\pi)$ (de hecho en todo $\mathbb{R}$), incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$ donde toma el

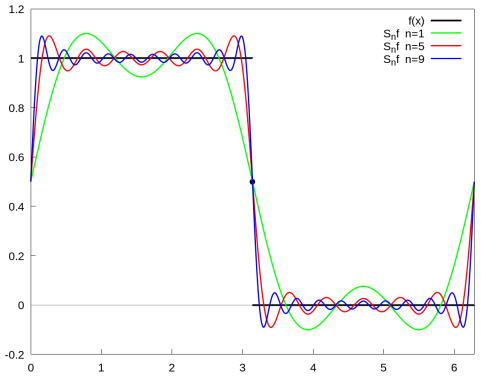


Figura 4.1: La función discontinua f y las sumas parciales de su serie de Fourier para $n = 1, 5, 9$.

valor $1/2$ (ver figura 4.1) Es decir, para la convergencia de la serie de Fourier, aunque esta no converja a la función en todo punto, no es necesaria la continuidad de f. Resulta que tampoco es suficiente. Es decir, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.5.4 *Existen funciones 2π-periódicas continuas cuyas series de Fourier divergen en un punto x_0 dado.*

Para probar el teorema anterior conviene recordar algunas de las propiedades de las series de Fourier.

Sustituyendo las expresiones (4.5.4) de los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier en (4.5.5) obtenemos

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t-x)dt, \quad D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz), \tag{4.5.7}$$

donde $D_n(z)$ es el núcleo de Dirichlet. Usando la identidad

$$2\cos(kz)\sin z/2 = \sin(k+1/2)z - \sin(z-1/2)t,$$

y sumando de $k = 1$ hasta n obtenemos la siguiente expresión alternativa para el núcleo de Dirichlet:

$$D_n(z) = \frac{\sin(n+1/2)z}{2\sin t/z}, \quad z \neq 0, \quad D_n(0) = n + \frac{1}{2}. \tag{4.5.8}$$

[5]Por la periodicidad de f, y $S_n f(x)$, eso equivale a preguntarnos por la convergencia en todo $\mathbb{R}$.

[6]Ver, por ejemplo, [13, Proposición 3 §16.2.3, pág. 376].

Nótese que $|D_n(z)| \leq n + 1/2$.

Sin pérdida de generalidad podemos elegir como punto de divergencia al punto $x = 0$. La idea es definir una sucesión $(T_n)_n$ de funcionales lineales[7] sobre $\tilde{C}$

$$T_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt.$$

Nótese que $T_n f = S_n f(0)$. Así, para probar el teorema basta probar que T_n es acotada para cada n y pero que la sucesión de normas $\|T_n\|$ no lo es.

4.6. Problemas

Problema 4.1 Prueba que los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{P}_n$ y $C_{[a,b]}$ son espacios vectoriales.

Problema 4.2 Prueba que para todos x, y de un espacio normado $\mathbb{X}$ se cumple la desigualdad $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Deduce de este resultado que la norma $\|\cdot\| : \mathbb{X} \mapsto [0, \infty)$ es una aplicación continua.

Problema 4.3 Prueba que el espacio ℓ^∞ de las sucesiones acotadas $(x_n)_n$ con la *norma* $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ es un espacio normado. Demuestra que en este espacio el subespacio Y de las sucesiones con un número finito de términos no nulos no es cerrado (y por tanto no es completo) en ℓ^∞. **Ayuda:** Usa la sucesión $s_n = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots) \in Y$ y la sucesión $x = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 1/(n+1), \ldots) \in \overline{Y}$.

Problema 4.4 Prueba que los operadores de los ejemplos 4.4.2-4.4.6 son operadores lineales. Decide, usando distintas normas, si el operador del ejemplo 4.4.6 es acotado.

Problema 4.5 Prueba que el operador $T : C^\infty_{[0,1]} \mapsto C^\infty_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \tag{4.6.1}$$

[7] Un funcional lineal T no es más que una aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, de un espacio normado $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) donde $\mathbb{R}$ se entiende como un espacio normado con la norma del valor absoluto.

con $k(t,\tau)$ continua en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ es lineal y acotado y que

$$\|T\| = K = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Problema 4.6 Prueba que el operador $T : L^1[0,1] \mapsto L^1_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| = \max_{\tau\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|dt,$$

donde por $L^1[0,1]$ denotamos el completamiento del conjunto de las funciones integrables en $[0,1]$, i.e., $x \in L^1[0,1]$ si $\int_0^1 |x(t)|dt < +\infty$.

Problema 4.7 Prueba que el operador $T : L^1_{[0,1]} \mapsto C^\infty_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| = \max_{\tau,t\in[0,1]} |k(t,\tau)|.$$

Problema 4.8 Prueba que el operador $T : C^2_{[0,1]} \mapsto C^2_{[0,1]}$ con $y = Tx$ definido por (4.6.1) es lineal y acotado y que

$$\|T\| \le \sqrt{\int_0^1\int_0^1 |k(t,\tau)|^2 dt d\tau}.$$

En este caso no es sencillo encontrar la norma del operador en el caso general.

Problema 4.9 Demuestra que el operador T del ejemplo 4.4.5 $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $y = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es acotado en los siguientes casos

1. $T : \mathbb{R}^n_\infty \mapsto \mathbb{R}^n_\infty$ (ver ejemplo 3.1.8). Prueba que en este caso

$$\|T\| = \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right).$$

2. $T : \mathbb{R}^n_1 \mapsto \mathbb{R}^n_1$ (ver ejemplo 3.1.7). Prueba que en este caso

$$\|T\| = \max_{k=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}|\right).$$

3. $T : \mathbb{R}_2^n \mapsto \mathbb{R}_2^n$ (ver ejemplo 3.1.7). Prueba que en este caso

$$\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}.$$

Problema 4.10 Decide si el operador del ejemplo de las matrices 4.4.5 es acotado si escogemos la norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. En caso de que sea acotado da una estimación de su norma.

Solución: Este problema es similar al apartado 3 del problema 4.9.

Problema 4.11 Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal y acotado. Prueba que si $(x_n)_n \in \mathcal{D}(T)$ y $x_n \to x \in \mathcal{D}(T)$, entonces $Tx_n \to Tx$. Prueba además que el espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $\mathcal{D}(T)$. **Ayuda:** Usa el teorema 4.4.17 y la proposición 3.5.4.

Problema 4.12 Sean A, B dos operadores lineales y biyectivos $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, y $B : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ espacios vectoriales. Entonces existe el operador T inverso del operador $BA : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$, $T = (BA)^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{X}$ y $T = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Problema 4.13 Sean dos operadores A, B de $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio normado, lineales y acotados. Prueba que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. En particular, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Problema 4.14 Sea $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ el espacio de todas las aplicaciones lineales y acotadas $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Dadas dos aplicaciones lineales $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, definamos la aplicación $T : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{X})$ por $TX = AXB$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que el operador T es lineal y acotado (respecto a la norma de operadores) y que $\|T\| \leq \|A\|\|B\|$.

Problema 4.15 Demuestra que no se puede prescindir de la condición de completitud de $\mathbb{X}$ en el Teorema de Banach-Steinhaus 4.5.1. Para ello considera un subespacio $\mathbb{X} \subset \ell^\infty$ consistente en todos los $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ tales que $x_j = 0$ para todo $j > J \in \mathbb{N}$, es decir cada x tiene a lo más las primeras J coordenadas no nulas (la J puede depender de cada x). Sea el operador (funcional) $T_n x = f_n(x) = nx_n$. Probar que $\mathbb{X}$ no es completo (ver problema 4.3), que $|f_n(x)|$ está acotado para cada n y todo $x \in \mathbb{X}$, y que $(\|T_n\|)_n$ es no acotada.

Problema 4.16 Usando el Teorema de Banach-Steinhaus prueba que si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach, $\mathbb{Y}$ uno normado, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $\sup_n \|T_n\| = \infty$, entonces existe un $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $\sup_n \|T_n x_0\| = \infty$. Dicho x_0 se suele denominar como punto o vector de *resonancia*.

Problema 4.17 Sea un espacio normado $\mathbb{X}$ y sea $M \subset \mathbb{X}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ distinto de $\mathbb{X}$. Prueba que existe un vector $y \in \mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in M$, $\|y\| = 1$ y $\|y - x\| > 1/2$.

Problema 4.18 Sea un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión infinita. Prueba que la esfera unidad S, i.e. el conjunto de los $x \in \mathbb{X}$ tales que $\|x\| \leq 1$ no es un compacto[8]. Una consecuencia del este resultado es que si en un espacio normado $\mathbb{X}$ la esfera unidad es compacta, entonces $\mathbb{X}$ es de dimensión finita. **Ayuda:** Usando el problema anterior construir una sucesión de elementos $(x_n)_n \in S$ tal que, para todos $n \neq m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$.

Teoremas, Proposiciones y Problemas para el examen

Teoremas principales: Teorema de Banach-Steinhaus 4.5.1.

Resultados importantes: 4.2.11, 4.2.12, 4.2.16, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.7, 4.3.8, 4.4.8, 4.4.9, 4.4.16, 4.4.17, 4.4.19, 4.5.4, 4.18.

Problemas y ejercicios: Probar las afirmaciones de los siguientes ejemplos y ejercicios: 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, **??**, 4.3.6, 4.4.13, 4.4.14, 4.4.15, 4.5.3. Problemas: 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.8, 4.9, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17.

[8]En dimensión finita como la esfera unidad es cerrada y acotada, entonces es un compacto.

Capítulo 5

Espacios de Hilbert

5.1. Espacios euclídeos y espacios de Hilbert

En adelante asumiremos que $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial complejo, y por $\overline{z}$ denotaremos al complejo conjugado del número complejo z.

Definición 5.1.1 *Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es un espacio euclídeo*[1] *si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in \mathbb{E}$ existe un número denominado* producto escalar *y que denotaremos por $\langle x, y\rangle$ tal que*

1. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*
2. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.*
3. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$*
4. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ y si $\langle x, x\rangle = 0$, entonces $x = 0$.*

Ejercicio 5.1.2 *Prueba que, de la definición anterior, se tiene que*

1. *Para todos $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.*
2. *Para todos $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.*
3. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.*

[1] También suele ser denominado espacio prehilbertiano.

4. *Si* $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ *para todos los* $z \in \mathbb{E}$*, entonces* $x = y$*.*

Ejemplo 5.1.3 *El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio* $\mathbb{C}^n$ *con el producto escalar estándar: dados* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*, e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

Ejemplo 5.1.4 *El segunda ejemplo es* ℓ^2*, el espacio de las sucesiones* $(x_n)_n$ *tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$*, donde, dadas dos sucesiones* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$*, e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Nótese que de la desigualdad de Hölder 3.7.3 se sigue que dicho producto escalar esta bien definido.

Ejemplo 5.1.5 *Nuestro tercer ejemplo es el espacio* $C_{[a,b]}$ *(que denotaremos por* $C^2_{[a,b]}$*) de las funciones continuas en* $[a, b]$ *cerrado y acotado con el siguiente producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{5.1.1}$$

Una propiedad importante de los espacios euclídeos es la desigualdad de Cauchy-Schwarz[2]

Teorema 5.1.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sea* $\mathbb{E}$ *un espacio euclídeo. Entonces para todos* $f, g \in \mathbb{E}$*,*

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle. \tag{5.1.2}$$

Teorema 5.1.7 *Todo espacio euclídeo* $\mathbb{E}$ *es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula* $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$*. Además,* $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$*.*

[2]Para los casos de $\mathbb{C}^n$, ℓ^2 y $C_{[a,b]}$ discutidos antes esta desigualdad no es más que la desigualdad de Hölder.

De lo anterior se sigue que todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

Así, por ejemplo, en $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, en ℓ^2, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$, y en $C_{[a,b]}$ es $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$. Además, en cada caso la métrica inducida es la correspondiente a los ejemplos 3.1.5, 3.1.12 ($p=2$) y 3.1.10 ($p=2$) del capítulo 3, respectivamente.

Ejercicio 5.1.8 *Prueba que, en la norma inducida por el producto escalar, las operaciones adición de vectores, multiplicación por un escalar y producto escalar de vectores son continuas, i.e., si* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ *y* $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, *entonces* $x_n + y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x+y$, $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$, *y* $\langle x_n, y_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$. ***Ayuda:*** *Para el último escribe* $\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y - y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y_n\rangle$ *y usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.1.2).*

Es fácil probar (ver Ejercicio 5.1) que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2). \tag{5.1.3}$$

De hecho se tiene la siguiente

Proposición 5.1.9 *Un espacio normado* $\mathbb{X}$ *real es euclídeo si y sólo si para todos* $x, y \in \mathbb{E}$, *se cumple la ley del paralelogramo* (5.1.3).

La proposición anterior nos dice que la ley del paralelogramo (5.1.3) caracteriza los espacios euclídeos. El caso complejo es algo más complicado de probar. La demostración original se debe a P. Jordan y J. von Neuman (*Annals of Math.* **36**, 719–723)[3] y se basa en probar que la cantidad

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

define un producto escalar en $\mathbb{X}$ complejo, lo cual dejamos como ejercicio al lector.

[3]Ver el Teorema 11.1 pág. 244 de [9].

Definición 5.1.10 *Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo*[4] *se denomina espacio de Hilbert y lo denotaremos por $\mathbb{H}$.*

Definición 5.1.11 *Sea el sistema de vectores $(\phi_n)_n$ (finito o infinito) de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$. Diremos que $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos si para todos n, m*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m} \|\phi_n\|^2. \tag{5.1.4}$$

Si además $\|\phi_n\| = 1$ para todo n, se dice que el sistema es ortonormal.

Por ejemplo, el sistema de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

es un sistema ortonormal. Análogamente, el sistema $(e_k)_{k=1}^n$, definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots), \\ e_n &= (0, 0, 1, 0 \dots), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

es un sistema ortonormal de ℓ^2. Finalmente, el sistema de funciones $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos de $C_{[-\pi,\pi]}$, i.e., del espacio euclídeo de las funciones continuas en $[-\pi, \pi]$, con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ejercicio 5.1.12 *Prueba que si los vectores (no nulos) $\phi_1, \dots, \phi_n$ de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.*

[4]Es decir, un espacio $\mathbb{E}$ donde cualquier sucesión de Cauchy converge a un vector de $\mathbb{E}$ (en la métrica inducida por el producto escalar).

Teorema 5.1.13 (Gram-Schmidt) *En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (ortogonales).*

El proceso anterior se denomina *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*. De lo anterior se sigue que, para cada $n \geq 2$ ($\tilde{\psi}_1 = \phi_1$),

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \tilde{\psi}_k \Rightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} \tilde{\psi}_k,$$

de donde se deduce que los subespacios generados por los vectores $(\phi_n)_n$ y $(\psi_n)_n$ coinciden, i.e.. $\operatorname{span}(\psi_1, \ldots, \psi_p) = \operatorname{span}(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ para todo p. Además, se tiene la propiedad

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 1, \ldots n-1 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 1, \ldots n-1.$$

De hecho, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 5.1.14 *Los vectores ortonormales ψ_n, $n \geq 1$, se pueden calcular mediante la siguiente expresión explícita:*

$$\psi_n = \frac{\det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}}, \tag{5.1.7}$$

donde $\Delta_n := \Delta_n(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ para $n \geq 1$ y denota al determinante de Gram de los vectores $\phi_1, \ldots, \phi_n$, definido por (definiremos $\Delta_0 := 1$)

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_2, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}. \tag{5.1.8}$$

Además, $\Delta_n > 0$, para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5.1.15 *Prueba que un conjunto de vectores $\phi_i \in \mathbb{H}$ de un espacio euclídeo, $i = 1, \ldots, p$, son linealmente independientes si y sólo si su determinante de Gram*

$$\det \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_p \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_p, \phi_1 \rangle & \langle \phi_p, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_p, \phi_p \rangle \end{vmatrix} \neq 0.$$

es distinto de cero.

Teorema 5.1.16 *Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.*

En adelante estudiaremos las propiedades de los espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ separables. Nótese que, en virtud del teorema anterior, en estos espacios los sistemas ortogonales son numerables.

5.2. Espacios de Hilbert separables

En este apartado asumiremos que el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es separable.

Definición 5.2.1 *Dado un vector $x \in \mathbb{H}$ definiremos la serie de Fourier respecto al sistema ortonormal $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ a la serie*

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \tag{5.2.1}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$c_n = \langle x, \phi_n \rangle, \quad \forall n \geq 1. \tag{5.2.2}$$

Teorema 5.2.2 *Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores ortonormales $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n)$. Sea $x \in \mathbb{H}$. Entonces,*

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

donde c_k son los coeficientes definidos en (5.2.2) y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie de Fourier (5.2.1)

$$q = s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k.$$

Como corolario de lo anterior tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2, \tag{5.2.3}$$

por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge (¿por qué?) y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \langle x, \phi_k \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \phi_k, x \rangle = 0. \tag{5.2.4}$$

La desigualdad (5.2.3) se conoce como **desigualdad de Bessel**. Nótese que una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier (5.2.1) converja a x (en norma) es que

$$\|x - s_n\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle|^2.$$

Esta igualdad se conoce como **igualdad de Parseval** y es, en general, muy complicada de comprobar.

Definición 5.2.3 *Se dice que un sistema de vectores linealmente independientes $(\phi_n)_n$ es completo*[5] *en $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ si para todo vector $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ y cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe una combinación lineal*

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \quad \textit{tal que} \quad \|x - l_n\| < \epsilon\,.$$

En otras palabras cualquier vector $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ se puede aproximar en norma tanto como se quiera mediante alguna combinación finita de vectores del sistema $(\phi_n)_n$. O, equivalentemente, sea $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \dots)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de $(\phi_n)_n$, entonces $(\phi_n)_n$ es completo en $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ si el conjunto $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots) \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$. La definición anterior 5.2.3 es equivalente a decir que $\mathbb{X}$ es el menor subespacio vectorial cerrado que contiene al conjunto $\phi_1, \phi_2, \dots$ ($(\phi_n)_n$ genera a todo $\mathbb{X}$).

[5] También se suele denominar sistema total.

Definición 5.2.4 *Un sistema ortogonal (ortonormal) completo de $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ se denomina base ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.*

Por ejemplo, los sistemas $(e_k)_k$ definidos por (5.1.5) y (5.1.6) son bases ortogonales completas de $\mathbb{C}^n$ y ℓ^2, respectivamente.

Teorema 5.2.5 (De los sistemas completos) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea el sistema ortonormal de vectores $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$(\phi_n)_n$ es completo en $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$.*
3. *Para todo $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, se cumple la igualdad de Parseval*
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2. \tag{5.2.5}$$
4. *Si $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.*

Nota 5.2.6 *La equivalencia entre 1 y 2, así como las implicaciones $2 \to 3 \to 4$, son también ciertas para espacios euclídeos cualesquiera (no necesariamente completos).*

Del apartado 4 del Teorema 5.2.5 se sigue el siguiente corolario:

Corolario 5.2.7 *Sea el sistema ortonormal completo $(\phi_n)_n$ y sean $x, y \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ tales que $\langle x, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$.*

En otras palabras, dos elementos de $\mathbb{H}$ con iguales coeficientes de Fourier son iguales, por tanto cualquier vector de $\mathbb{H}$ queda **biunívocamente** determinado por sus coeficientes de Fourier.

Definición 5.2.8 *Se dice que un sistema ortonormal $(\phi_n)_n$ es cerrado en un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ si para todo vector $x \in \mathbb{E}$ se cumple la igualdad de Parseval* (5.2.5) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 = \|x\|^2$.

De la definición anterior y el Teorema 5.2.5 se tiene que un un sistema ortonormal $(\phi_n)_n$ es completo en un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ si y sólo si $(\phi_n)_n$ es cerrado en $\mathbb{H}$.

Teorema 5.2.9 *Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.*

El teorema anterior 5.2.9 se puede generalizar a cualquier espacio euclídeo separable (no necesariamente completo).

Como hemos visto, dado un $x \in \mathbb{H}$ y un sistema ortonormal $(\phi_n)_n \in \mathbb{H}$ existen los coeficientes de Fourier de x en dicho sistema ortonormal. El siguiente resultado es el recíproco de lo anterior.

Teorema 5.2.10 (Riesz-Fischer) *Sea $(\phi_n)_n$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sean los números $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Entonces, existe un elemento $x \in \mathbb{H}$ cuyos coeficientes de Fourier son precisamente los números $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle.$$

De los teoremas 5.2.5, 5.2.9 y 5.2.10 se deduce que en un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ a cada $x \in \mathbb{H}$ le corresponde una serie de Fourier cuyos coeficientes de Fourier están biunívocamente determinados por x y que además se corresponden con un único vector de ℓ^2. Eso nos conduce a un resultado muy interesante pero para ello necesitamos de la siguiente definición previa:

Definición 5.2.11 *Una aplicación U entre dos espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ se denomina unitaria si U es lineal, biyectiva y preserva el producto escalar, i.e.*[6]*,*

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle_* = \langle x^*, y^* \rangle_*.$$

Los espacios $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ son isomorfos si existe una aplicación unitaria $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^*$ tal que $x^* = Ux$, donde $x \in \mathbb{H}$ y $x^* \in \mathbb{H}^*$.

[6]Se entiende que $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ denota el producto escalar en $\mathbb{H}^*$ que no tiene por que ser el mismo que en $\mathbb{H}$.

Teorema 5.2.12 (del isomorfismo) *Cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a ℓ^2.*

5.2.1. El Teorema de la proyección ortogonal

Definición 5.2.13 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio*[7] *del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^\perp$, al conjunto*

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \ \forall y \in M\}.$$

Nótese que de la definición anterior se sigue que $M \bigcap M^\perp = \{0\}$. Además, si elegimos $M = \mathbb{H}$, entonces $\mathbb{H}^\perp = \{0\}$.

Ejercicio 5.2.14 *Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{E}$.*

Nótese que al ser $M^\perp$ cerrado, es completo (pues $\mathbb{H}$ es completo, ver Teorema 3.5.14).

Teorema 5.2.15 *Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y $M^\perp$ su complemento ortogonal. Entonces, todo vector $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación de la forma $x = y + y^\perp$ donde $y \in M$ e $y^\perp \in M^\perp$.*

Si todo elemento de $\mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^\perp$ donde $y \in M$, M cerrado, e $y^\perp \in M^\perp$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^\perp$ y se escribe como

$$\mathbb{H} = M \oplus M^\perp. \tag{5.2.6}$$

Lo anterior nos permite reescribir el teorema 5.2.15 en una forma equivalente.

Teorema 5.2.15 *Sea un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de $\mathbb{H}$. Entonces $\mathbb{H}$ se puede escribir como suma directa de M y $M^\perp$, i.e., se tiene* (5.2.6).

[7] Se entenderá, como el caso de los espacios normados que M es un subespacio *lineal* de $\mathbb{H}$.

Nótese que si en (5.2.6) elegimos $M = \mathbb{H}$ obtenemos que $\mathbb{H} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}^\perp = \mathbb{H} \oplus \{0\}$.

Es *fácil* ver que la noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

Está claro que si $x \in M \subset \mathbb{H}$, entonces $x \perp M^\perp$, luego $x \in (M^\perp)^\perp$ y, por tanto, $M \subset (M^\perp)^\perp$.

Ejercicio 5.2.16 *Probar que si M es cerrado, entonces $(M^\perp)^\perp = M$.*

Si M es cerrado, entonces del teorema anterior 5.2.15 (ver (5.2.6)) se sigue que $(M^\perp)^\perp = M$.

Sea $x \in (M^\perp)^\perp$ cualquiera. Como M es cerrado entonces, por el teorema anterior 5.2.15 (ver (5.2.6)) se tiene que $x = y + y^\perp$ con $y \in M \subset (M^\perp)^\perp$ y $y^\perp \in M^\perp$. Pero, por otro lado, $y^\perp = x - y \in (M^\perp)^\perp$ ($y \in M \subset (M^\perp)^\perp$) de donde se sigue que $y^\perp \perp M^\perp$, o sea, $\langle y^\perp, y^\perp \rangle = 0$ (recuérdese que $y^\perp \in M^\perp$), i.e., $y^\perp = 0$, luego $x = y \in M$. Como x era arbitrario, se tiene $(M^\perp)^\perp \subset M$, de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 5.2.17 (de la proyección ortogonal) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea $M \subset \mathbb{H}$ un espacio generado por ciertos vectores linealmente independientes de $\mathbb{H}$, i.e., $M = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_p)$, y sea x un vector de $\mathbb{H}$ dado. Entonces existe un único $y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in M$. Además existe dicho $y \in M$ si y sólo si $\langle x - y, m \rangle = 0$, para todo $m \in M$.*

El teorema anterior nos dice que si buscamos el vector y más cercano a un vector $x \in \mathbb{H}$ dado como combinación lineal de los vectores generadores de $M = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_p)$, i.e., $y = \sum_{k=1}^p \alpha_k y_k$, entonces el $\min_{m \in M} \|x - m\|$ se alcanza cuando $x - y$ es ortogonal a cada uno de los y_j, $j = 1, \ldots, p$. Luego

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^p \alpha_k y_k, y_j \right\rangle = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, p.$$

Eso nos conduce al siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\sum_{j=1}^p \langle y_j, y_k \rangle \alpha_j = \langle x, y_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{5.2.7}$$

La matriz de este sistema coincide con la matriz de Gram de los vectores $y_1, \ldots, y_p$ (ver el Teorema 5.1.13 y la discusión posterior). El sistema anterior (5.2.7) se conoce como *sistema normal*. Nótese que el sistema anterior tiene solución (podemos encontrar los α_i, $i = 1, \ldots, p$) si el determinante de la matriz de Gram es distinto de cero. Pero dicho determinante es distinto de cero si y solo si los vectores y_i, $i = 1, \ldots, p$ son linealmente independientes (ver ejercicio 5.1.15).

Tomemos ahora un $x \in \mathbb{H}$ dado y sea $\delta = \min_{m \in M} \|x - m\| = \|x - y\|$. Entonces

$$\delta^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x \rangle,$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle y_j, x \rangle + \delta^2 = \langle x, x \rangle.$$

Juntando esta última ecuación con sistema normal (5.2.7) obtenemos el sistema lineal de $p+1$ ecuaciones con $p+1$ incógnitas

$$\begin{pmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_p, y_1 \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_p \rangle & \cdots & \langle y_p, y_p \rangle & 0 \\ \langle y_1, x \rangle & \cdots & \langle y_p, x \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, y_p \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior podemos encontrar no solo los coeficientes α_k, y por tanto el vector y, donde se alcanza el mínimo $\min_{m \in M} \|x - m\|$, sino también el valor δ del mismo. De hecho usando la regla de Cramer obtenemos

$$\delta^2 = \frac{\Delta_{p+1}(y_1, \ldots, y_p, x)}{\Delta_p(y_1, \ldots, y_p)},$$

donde $\Delta_n(v_1, \ldots, v_k)$ es el determinante de Gram de los vectores $v_1, \ldots, v_k$ (5.1.8).

Como aplicación de lo anterior tenemos el siguiente:

Ejercicio 5.2.18 *Sean m números reales $x_1, \ldots, x_m$ y sea una matriz $m \times n$, W con $n < m$ cuyas columnas son linealmente independientes. Encontrar el vector $z \in \mathbb{R}^n$ tal que la norma euclídea $\|x - Wz\|$ sea mínima, i.e., queremos encontrar el mejor estimador lineal de $x \in \mathbb{R}^m$.*

Otras aplicaciones interesantes se pueden encontrar en [7].

5.2.2. El teorema de representación de Riesz

Para terminar este capítulo demostraremos un teorema sobre funcionales lineales acotados.

Definición 5.2.19 *Un funcional lineal es una aplicación lineal $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$ siendo $\mathbb{K}$ el conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.*

Teorema 5.2.20 (de representación de Riesz) *Cualquier funcional lineal acotado sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$, ($\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) se puede representar en términos de un producto escalar, i.e.,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \tag{5.2.8}$$

donde z depende de f y esta unívocamente determinado por f y su norma satisface la ecuación

$$\|z\| = \|f\|. \tag{5.2.9}$$

Como veremos más adelante, este teorema juega un papel esencial en la teoría de operadores es espacios de Hilbert.

5.3. Problemas

Problema 5.1 Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*.

Problema 5.2 Prueba que en el caso complejo un espacio normado es euclídeo si se tiene la ley del paralelogramo (5.1). Para ello hay que probar que la cantidad

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

define un producto escalar en $\mathbb{X}$ complejo.

Problema 5.3 Usando el ejercicio 5.1 prueba que los espacios normados $\mathbb{R}^n_p$, ℓ^p y $C^p_{[a,b]}$ correspondientes al ejercicio 4.2.4 y los ejemplos 4.2.7 y 4.2.5 no son espacios euclídeos salvo para $p = 2$.

Problema 5.4 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

Problema 5.5 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable. Prueba que cualquier subespacio cerrado $M \subset \mathbb{H}$ es a su vez un espacio de Hilbert. Además, M tiene una base ortonormal.

Problema 5.6 A partir del teorema 5.2.15, prueba que todo sistema ortogonal $(\phi_n)_{n=1}^N$ en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable se puede completar hasta obtener una base ortogonal de $\mathbb{H}$.

Problema 5.7 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal completa de $\mathbb{H}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{H}$, se tiene la igualdad, también denominada igualdad de Parceval

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \overline{\langle y, \phi_n\rangle}.$$

Problema 5.8 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $(\phi_n)_n$ una base ortonormal completa de $\mathbb{H}$. Prueba, sin usar el teorema 5.2.5, que para todo $x \in \mathbb{H}$, la serie

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n\rangle \phi_n$$

converge, y que el vector $x - y$ es ortogonal a cada ϕ_n, $n \geq 1$.

Problema 5.9 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$. Definiremos como $\operatorname{span}(M)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M. Prueba que para todo $M \neq \emptyset$, $V = \operatorname{span}(M)$ es denso en $\mathbb{H}$ si y solo si $M^\perp = \{0\}$.

Problema 5.10 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$. Prueba que M es cerrado si y solo si $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

Problema 5.11 Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$. En este caso sabemos (ver (5.2.6)) que para todo $x \in \mathbb{H}$ existen unos únicos $y \in M$ y $y^{\perp} \in M^{\perp}$ tales que $x = y + y^{\perp}$. Definamos el operador $P : \mathbb{H} \mapsto M$ mediante la fórmula $x \mapsto y = Px$. P se denomina operador de proyección (o proyector ortogonal) de $\mathbb{H}$ sobre M. Prueba que

1. P es lineal y acotado.
2. $P(M^{\perp}) = 0$.
3. $P^2 = P \cdot P = P$ (es idempotente).

Teoremas, Proposiciones y Problemas para el examen

Teoremas principales: De los sistemas completos 5.2.5, de la proyección ortogonal 5.2.17, de representación de Riesz 5.2.20.

Resultados importantes: Probar los siguientes teoremas: 5.1.6, 5.1.7, 5.1.13, 5.1.16, 5.2.2, 5.2.9, 5.2.10, 5.2.12, 5.2.15,

Problemas y ejercicios: Probar las afirmaciones de los siguientes ejemplos y ejercicios: 5.1.2, 5.1.4, 5.1.8, 5.1.12, 5.1.15, 5.2.7, 5.2.14, 5.2.16. Problemas: 5.1, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.9, 5.10, 5.11

Capítulo 6

Operadores en espacios de Hilbert

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de los operadores lineales definidos en espacios de Hilbert separables sobre $\mathbb{C}$.

6.1. Definiciones

Definición 6.1.1 *Sea la aplicación (operador) lineal y acotada $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ espacios euclídeos. Si existe el operador lineal $A^* : \mathbb{E}' \mapsto \mathbb{E}$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$ e $y \in \mathbb{E}'$*

$$\langle Ax, y\rangle' = \langle x, A^*y\rangle, \qquad (x \in \mathbb{E},\ y \in \mathbb{E}') \tag{6.1.1}$$

lo denominaremos adjunto de A.

Por sencillez asumiremos $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

Por ejemplo sea el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \tag{6.1.2}$$

comúnmente denominado *operador desplazamiento* (shift). Entonces su adjunto S^* es el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots), \tag{6.1.3}$$

Ejercicio 6.1.2 *Sea el operador multiplicación* $M : C^2_{[a,b]} \mapsto C^2_{[a,b]}$ *definido por*

$$Mx(t) = f(t)x(t), \quad f(t) \in C_{[a,b]}, \quad \forall x(t) \in C^2_{[a,b]}.$$

Prueba que M^* *existe y es el operador multiplicación por la función complejo conjugada* $\overline{f(t)}$*. Prueba que este operador es acotado y que* $\|M\| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$*. Nótese que si* $f(t)$ *es real entonces* $M^* = M$*.*

Para los espacios euclídeos la existencia del operador adjunto no está garantizada en general, no obstante sí que lo está en el caso de los espacios de Hilbert. De hecho, como consecuencia del Teorema de representación de Riesz 5.2.20 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.1.3 (Existencia del operador adjunto) *Sea la aplicación (operador) lineal y acotada* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$*,* $\mathbb{H}$*,* $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador* $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ *adjunto a* A*. Además,* A^* *es lineal y*

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{6.1.4}$$

Veamos algunas propiedades de los operadores adjuntos.

Proposición 6.1.4 *Sean las aplicaciones lineales acotadas* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$*,* $B : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$*,* $\mathbb{H}$*,* $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces se cumple que*

1. $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle'$*,* $x \in \mathbb{H}$ *e* $y \in \mathbb{H}'$*,*
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$*,*
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$*,*
4. $(A^*)^* = A$*,*
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$*,*
6. $A^*A = 0$ *si y solo si* $A = 0$*,*
7. *Si* $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$*, entonces* $(AB)^* = B^*A^*$*.*

Definición 6.1.5 *Sea* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*. Si* $A = A^*$*, se dice que el operador es hermítico o autoadjunto.*

Lo anterior implica que A es autoadjunto si y solo si para todos $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Definición 6.1.6 *Sea $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ biyectivo. Si $U^{-1} = U^*$, se dice que el operador es unitario.*

Nótese que lo anterior es equivalente a decir que $U^*U = UU^* = I$. Además de la definición de adjunto se sigue que

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle,$$

i.e., los operadores unitarios preservan el producto escalar.

Definición 6.1.7 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$. Si $AA^* = A^*A$, se dice que el operador es normal.*

Obviamente tanto los operadores autoadjuntos como los unitarios son normales, pero no al contrario. Tómese como ejemplo el operador $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T = 2iI$, donde I es el operador identidad (ver ejemplo 4.4.2). Está claro que $TT^* = T^*T = 4I$, luego es normal, pero no es autoadjunto pues $T^* = -T$ y claramente no es unitario.

Antes de continuar vamos a hacer una breve incursión por el álgebra lineal. En adelante asumiremos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$. Supongamos que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces como ya hemos visto, $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Definamos el operador $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal.

Sea $(e_k)_k$ una base de $\mathbb{H}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{H}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \quad \Rightarrow \quad y = Tx = \sum_{k=1}^{n} x_k T e_k.$$

Si

$$Te_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad \Rightarrow$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Es decir, si consideramos los vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$ con coordenadas x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente, entonces el operador T se puede representar usando una matriz $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, i.e., tenemos la aplicación $T : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, $y = Ax$, donde A es la matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

obtenida a partir de la transformaciones de los elementos de la base $(e_k)_k$ de $\mathbb{H}$.

Nota 6.1.8 *Nótese que la equivalencia de un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido sobre un espacio de dimensión finita, $\dim \mathbb{H} = n < +\infty$, discutida aquí es extensible a cualquier espacio normado (no necesariamente un espacio de Hilbert) de dimensión finita, pues la construcción que se ha hecho solo hace uso de las propiedades de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales.*

Si tenemos un espacio de Hilbert de dimensión finita hemos visto que es es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ (ver teorema 5.2.12). Tomemos en $\mathbb{C}^n$ la base canónica $e_k = \delta_{i,k}$, $k, i = 1, \ldots, n$. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, el producto escalar viene dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = x^T \overline{y},$$

donde por x^T entendemos el vector traspuesto de x. Luego

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T (A^T \overline{y}) = x^T \overline{(\overline{A}^T)\, y} = \langle x, T^* y \rangle.$$

Es decir, si al operador T le corresponde la matriz A a su adjunto T^* le corresponde la matriz $B = \overline{A}^T$.

Así, tenemos en dimensión finita que

1. Un operador T es autoadjunto si su correspondiente matriz A en hermítica, i.e., $A = \overline{A}^T$.

2. Un operador T es unitario si su correspondiente matriz U es unitaria, i.e., $A^{-1} = \overline{A}^T \iff A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I$.

3. Un operador T es normal si su correspondiente matriz UA satisface que $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$.

Ejercicio 6.1.9 *Prueba que la matriz del operador identidad es la matriz identidad. ¿Cuál es la matriz del operador $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$, $Ae_k = e_k$, $k = 3, \ldots, n$, donde $(e_k)_{k=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$?*

Nótese que lo anterior se puede generalizar al caso de dimensión infinita, sólo que en este caso la matriz sería una matriz infinita

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.1.10 *Usando la base de Schauder de ℓ^2 (ver ejemplo 4.2.15) encuentra las matrices del operador S y S^* definidos en (6.1.2) y (6.1.3), respectivamente.*

Ejercicio 6.1.11 *¿Cuál es la matriz del operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$ tal que $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$, $Ae_k = e_k$, $k = 3, \ldots, n$, $(e_k)_k$ en la base de Schauder definida en el ejemplo 4.2.15? ¿Es dicho operador acotado?*

6.2. Operadores autoadjuntos

Veamos algunas propiedades de los operadores autoadjuntos.

Lema 6.2.1 *Sea $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$, con $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo complejo. Entonces, si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$, A es el operador nulo $A = \Theta$.*

Teorema 6.2.2 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal y acotado en $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces*

1. *Si A es autoadjunto, entonces para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $\mathbb{H}$ es complejo y para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, entonces A es autoadjunto.*

El teorema anterior caracteriza los operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert complejos.

Ejercicio 6.2.3 *Probar las siguientes afirmaciones:*

1. *Sean A y B operadores autoadjuntos de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $A + B$ y αA también son autoadjuntos.*
2. *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador y A^* su adjunto. Entonces $A + A^*$ y A^*A son autoadjuntos*

Proposición 6.2.4 *El producto AB de dos operadores autoadjuntos A y B es autoadjunto si y solo si A y B conmutan, i.e., $AB = BA$.*

Teorema 6.2.5 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados y autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.*

Teorema 6.2.6 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.*

Corolario 6.2.7 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Si $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = B$. En particular, si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces A es el operador nulo.*

Ejercicio 6.2.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto. Prueba que $\|A^2\| = \|A\|^2$.*

Para terminar este apartado veamos un ejemplo muy útil a la hora de encontrar ejemplos de distintos tipos de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Ejemplo 6.2.9 *Sea $(\mu_n)_n \in \mathbb{C}$ una sucesión (finita o infinita) acotada y sea $m = \sup_n |\mu_n|$. Entonces existe un único operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, tal que, para todo n,*

$$T\phi_n = \mu_n \phi_n. \tag{6.2.1}$$

Vamos a probarlo para el caso de dimensión infinita puesto que el de dimensión finita se puede considerar un caso particular de este cuando $\mu_n = 0$ para todos $n > N \in \mathbb{N}$.

Por el teorema 5.2.9 sabemos que existe una base ortonormal completa en $\mathbb{H}$, y por el 5.2.5, que todo $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación en serie de Fourier tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, \quad c_k = \langle x, \phi_k \rangle, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty. \tag{6.2.2}$$

Para cada $x \in \mathbb{H}$ definamos la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k.$$

Dicha serie converge para cada $x \in \mathbb{H}$. La idea es similar a la usada en la última parte de la prueba del teorema 5.2.5. Sean S_n las sumas parciales de S

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k \phi_k,$$

y sea $m > n$. Entonces,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\mu_n|^2 |c_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2,$$

que se puede hacer tan pequeño como se quiera si elegimos $m > n > N \in \mathbb{N}$, con N suficientemente grande. Luego S_n es de Cauchy y como $\mathbb{H}$ es completo, $S_N \to S$. Por tanto podemos definir el operador

$$T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbb{H}, \quad Tx = S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k. \tag{6.2.3}$$

Además, podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión de operadores $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T_n x = S_n$. Está claro que T_n es lineal. Probemos que T_n es acotado

para cada n. En efecto,

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |\mu_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = m^2 \|x\|^2. \tag{6.2.4}$$

Además, para cada $x \in \mathbb{H}$, $T_n x \to Tx$. Probemos que el operador T, es lineal y es acotado. La linealidad de T se sigue de la continuidad de la norma y la linealidad de los T_n. La acotación de T se sigue[1] de tomar el límite cuando $n \to \infty$ en (6.2.4)

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \mu_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2| \leq m^2 \|x\|^2.$$

De lo anterior se sigue además que $\|T\| \leq m$. Ahora bien

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\phi_n\| = \|\mu_n \phi_n\| = |\mu_n| \quad \Rightarrow \quad \forall n,\ \|T\| \geq |\mu_n|.$$

Tomando supremos en n se deduce que $\|T\| \geq m$, luego $\|T\| = m = \sup_n |\mu_n|$.

Nótese que como caso particular de (6.2.3) se tiene (6.2.1) y además

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k \phi_k. \tag{6.2.5}$$

Además, como T es acotado, existe T^*. Usando que, para todo $x \in \mathbb{H}$, tenemos, por un lado, que

$$T^* x = y^* = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \phi_k \quad \Rightarrow \quad \langle T^* x, \phi_n \rangle = \nu_n,$$

y, por el otro,

$$\langle T^* x, \phi_n \rangle = \langle x, T\phi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, \mu_n \phi_n \right\rangle = \overline{\mu_n} c_n \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \overline{\mu_n} \phi_n,$$

[1]También se puede usar el Teorema de Banach-Steinhaus pues la sucesión $\|T_n x\|$ es acotada para cada x, luego existe un $\|T_n\| \leq c$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que $\|T\| \leq c$, pues por el ejercicio 4.4.19 $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ es un espacio de Banach.

de donde se sigue que

$$T^*x = T^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k} c_k \phi_k, \tag{6.2.6}$$

y que, para todo n, $T^*\phi_n = \overline{\mu_n}\phi_n$.

Finalmente, como $T^*T\phi_n = |\mu_n|^2\phi_n = TT^*\phi_n$, entonces, por el problema[2] 6.2 se sigue que $T^*T = TT^*$, luego nuestro operador T es normal.

Obviamente si la sucesión $(\mu_n)_n$ es real, entonces T es autoadjunto. ■

6.3. Inverso de un operador

Veamos a continuación el problema de invertir un operador lineal A en un espacio normado en general y en un espacio euclídeo en particular. En el caso de dimensión finita este problema es relativamente sencillo. De hecho que exista el inverso A^{-1} de A es equivalente a que A sea inyectivo, sobreyectivo, que exista un B tal que $AB = I$, o que $BA = I$, donde I denota al operador identidad (ver ejemplo 4.4.2). Además, como ya vimos en el punto 4 del teorema 4.4.9, en el caso de dimensión finita existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$. Además, si nos restringimos a espacios normados de dimensión finita, A es acotado y si es invertible su inversa también es actotada.

En dimensión infinita la situación es mucho más complicada. Los siguientes ejemplos muestran una variedad de casos.

Ejemplo 1. El operador *operador desplazamiento* S definido por (6.1.2) es acotado e inyectivo (la ecuación $Sx = y$ tiene una única solución, o bien no tiene), luego tiene inversa según la definición 3.3.7, sin embargo no es sobreyectivo (la ecuación $Sx = y$ no tiene solución, e.g. elegir $y = (y_1, y_2, \dots)$, $y_1 \neq 0$). Por otro lado, el operador S^* definido en (6.1.2) es sobreyectivo pero no inyectivo (luego no tiene inverso según la definición 3.3.7). Además, es fácil comprobar que $S^*S = I$ mientras que $SS^* \neq I$.

Ejemplo 2. Sea el operador multiplicación por t del ejemplo 4.4.6, $M : L^2([0,1]) \mapsto L^2([0,1])$ (que es un caso particular del operador M del

[2]Se puede comprobar directamente, usando (6.2.5) y (6.2.6), que para todo $x \in \mathbb{H}$, $T^*Tx = TT^*x$, con x definido mediante la serie (6.2.2).

ejemplo 6.1.2). Este operador es acotado y además inyectivo. En efecto, $Mx(t) = 0$ si y solo si $x(t) = 0$ en casi todo punto, sin embargo no es sobreyectivo pues, por ejemplo, $Mx(t) = 1$ implica que $x(t) = 1/t$ que no es de $L^2([0,1])$.

Ejemplo 3. Sea el operador de Volterra $V : C_\infty([0,1]) \mapsto C([0,1])$,

$$Vx := (Vx)(t) = \int_0^t x(\tau)\tau, \quad t \in (0,1). \tag{6.3.1}$$

Este operador es acotado y tiene inverso (ver teorema 4.4.9) pues $Vx = 0$ implica $x(t) = 0$. Además está claro que la ecuación $(Vx)(t) = y(t)$ siempre tiene solución $x(t) = y'(t)$, luego el inverso de V es el operador derivada D que sabemos que no es acotado. Nótese que $\mathcal{I}(V) \neq C([0,1])$ pues si $y \in C([0,1])$ tal que $y(0) \neq 0$ entonces $y \notin \mathcal{I}(V)$.

Ejemplo 4. Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots). \tag{6.3.2}$$

Está claro que es acotado pues

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

Por otro lado, Se puede comprobar directamente que el operador B sobre las sucesiones de ℓ^2 definido por

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots),$$

es tal que $ABx = BAx = x$ para todo $x \in \ell^2$. Luego $B = A^{-1}$, pero está claro que B no es acotado (basta tomar como sucesión $(x_n)_n$, la base de Schauder definida en el ejemplo 4.2.15). Por otro lado, está claro también que $I(A) \neq \ell^2$, pues si elegimos $y = (1/n^{3/2})_n \in \ell^2$, entonces $Ax = y$ para $x = (1/n^{1/2})_n$ que no es de ℓ^2. Así A es acotado e invertible pero su inverso no es acotado.

Los ejemplos anteriores nos llevan a la siguiente pregunta: ¿Qué definición de inverso de un operador adoptar?

Una opción es usar la propia definición 3.3.7 que ya vimos en el contexto de los espacios métricos, pero es poco práctica. Es mucho más común

una definición inspirada en la propiedad discutida en la nota 3.3.9. Así, podríamos utilizar la siguiente definición:

Definición: Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Diremos que A es invertible si existe un operador B, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Nótese que según esta definición el operador desplazamiento S, que es invertible según la definición 3.3.7 cumple con $S^*S = I$ pero $SS^* \neq I$, por tanto no tendría inversa. Por otro lado, el operador del ejemplo 4 cumple con la definición anterior, pero como ya vimos su inverso es un operador no acotado.

Sin embargo hay un resultado muy importante cuya prueba por el momento omitiremos[3] conocido como el *Teorema de Banach de las aplicaciones inversas acotadas* que establece lo siguiente:

Teorema: *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, tal que el núcleo de A, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, y la imagen de A, $\mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.*

Dado que estamos interesados en los operadores lineales y acotados, lo anterior nos conduce a redefinir la inversa de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de la siguiente forma:

Definición 6.3.1 *Sea el operador $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Diremos que A es invertible si existe un operador $B \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.*

Nótese que según esta definición el operador (6.3.2) del ejemplo 4 no es invertible.

En adelante entenderemos que un operador acotado es invertible si existe su inversa y esta es acotada. Veamos a continuación varias propiedades de los operadores invertibles.

Teorema 6.3.2 (Existencia del operador inverso) *Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible y (en norma)*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad \textit{donde } A^0 := I \ \ \textit{y} \ \ \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

[3]Es una consecuencia del Teorema de Banach de la aplicación abierta, que a su vez se sigue del Teorema de Baire 3.6.1 que ya vimos al final del capítulo 3.

El teorema anterior admite una generalización que nos será de gran utilidad.

Teorema 6.3.3 *Sea el operador lineal y acotado $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < |\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces el operador $(\lambda I - A)$ es invertible y*

$$A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \quad \textit{y se cumple que} \quad \|A_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Ejercicio 6.3.4 *Modifica la demostración del teorema 6.3.2 para probar directamente el teorema anterior.*

Definición 6.3.5 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}$, siendo $\mathbb{X}$ un espacio normado. El conjunto de de todos los operadores lineales A lo denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ y al conjunto de todos los operadores lineales y acotados A lo denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.*

Un corolario trivial del resultado probado en el ejercicio 4.4.19 es el siguiente teorema:

Teorema 6.3.6 *El espacio $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, es un espacio de Banach respecto a la norma de los operadores.*

Ejercicio 6.3.7 *Adapta la prueba del Teorema 6.3.2 para probar que toda sucesión de Cauchy de operadores $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, es convergente, i.e., se tiene el teorema anterior 6.3.6.*

Conviene aclarar que la definición 6.3.1 es aplicable a cualquier operador lineal. No obstante conviene hacer notar que podemos tener un operador acotado inyectivo, por tanto invertible, cuyo inverso es un operador no acotado. Un ejemplo es el operador de Volterra V definido como sigue:

$$V : C_{[0,1]} \mapsto C_{[0,1]}, \qquad Vx := (Vx)(t) = \int_0^t x(\tau)\tau, \quad t \in (0,1).$$

Este operador tiene inverso (ver teorema 4.4.9) pues $Vx = 0$ implica $x(t) = 0$. Además está claro que la ecuación $(Vx)(t) = y(t)$ siempre tiene solución $x(t) = y'(t)$, luego el inverso de V es el operador derivada D que sabemos que no es acotado. Nótese que $\mathcal{I}(V) \neq C_{[0,1]}$.

Otro ejemplo de operador acotado invertible cuyo inverso no es acotado es el siguiente: $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots).$$

Está claro que

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

Por otro lado, Se puede comprobar directamente que el operador B sobre las sucesiones de ℓ^2 definido por

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots),$$

es tal que $ABx = BAx = x$ para todo $x \in \ll^2$. Luego $B = A^{-1}$, pero está claro que B no es acotado (basta tomar la sucesión $(e_n)_n$, la base de Schauder de ℓ^2). Por otro lado, está claro también que $I(A) \neq \ell^2$, pues si elegimos $y = (1/n^{3/2})_n \in \ll^2$, entonces $Ax = y$ para $x = (1/n^{1/2})_n$ que no es de ℓ^2.

Más adelante veremos que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, siendo $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, y tal que el núcleo de $A, \mathcal{N}(A) = \{0\}$, y la imagen de $A, \mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$. Este resultado se conoce como el *teorema de las aplicaciones inversas acotadas*.

Una aplicación directa del Teorema 6.3.2 es el siguiente resultado:

Teorema 6.3.8 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. El conjunto $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{X})$ de los operadores invertibles acotados en $\mathbb{X}$ es abierto en $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.*

6.4. Operadores compactos

Definición 6.4.1 *Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_n$ de $\mathbb{X}$, la sucesión $(Ax_n)_n$ de $\mathbb{Y}$ tiene una subsucesión convergente.*

Nótese que si A es compacto, A es acotado pues en caso contrario existiría una sucesión acotada $(x_n)_n$ tal que $\|Ax_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y entonces la sucesión $(Ax_n)_n$ no tendría una subsucesión convergente. Así pues, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.4.2 *Todo operador compacto es acotado.*

El recíproco no es cierto.

Ejercicio 6.4.3 *Prueba que el operador identidad $I : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert de dimensión infinita no es compacto.*

Escojamos una sucesión ortonormal $(x_n)_n$ en $\mathbb{H}$. Como $\|x_n - x_m\|^2 = 2$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $Ix_n = x_n$ no contiene subsucesiones de Cauchy y por tanto no tiene subsucesiones convergentes. ■

Teorema 6.4.4 *Sea A un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados de dimensión finita. Entonces A es compacto.*

Ejemplo 6.4.5 *Se puede probar directamente, sin usar el teorema anterior, que cualquier operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, con $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert de dimensión finita es compacto.*

En efecto, del Teorema 4.4.16 sabemos que el operador A es acotado, y del Teorema del isomorfismo 5.2.12 que $\mathbb{H}$ es equivalente (isomorfo) a $\mathbb{C}^N$, con N la dimensión de $\mathbb{H}$. Entonces, dada cualquier sucesión acotada $(x_n)_n$, la sucesión (Ax_n) es acotada y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (en $\mathbb{C}^N$) dicha sucesión contiene al menos una subsucesión convergente, luego A es compacto. ■

Teorema 6.4.6 *El conjunto de todos los operadores compactos $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, es un espacio vectorial.*

Proposición 6.4.7 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sean y y z dos elementos dados de $\mathbb{H}$. Sea el operador lineal $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido por $Tx = \langle x, y \rangle z$. Entonces T es compacto.*

Nótese que si el operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, es acotado, i.e., $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, y su imagen $\mathcal{I}(A)$ es de dimensión finita, entonces, si $(x_n)_n$ es acotada, $(Ax_n)_n$ lo será y razonando como en la prueba del teorema 6.4.4, se deduce que A es compacto (independientemente de la dimensión de $\mathbb{H}$). Veamos que la hipótesis de que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ no es necesaria.

Ejercicio 6.4.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado de* rango finito *en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, i.e., la imagen de A, $\mathcal{I}(A)$, es de dimensión finita ($\dim \mathcal{I}(A) = n < +\infty$). Prueba, usando la proposición anterior, que A es compacto.*

Teorema 6.4.9 *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.*

El teorema anterior 6.4.9 se puede parafrasear diciendo que el subespacio de los operadores compactos es cerrado[4] en $\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Teorema 6.4.10 *Sea $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador compacto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces su adjunto T^* es compacto.*

6.5. Teorema Espectral

En este apartado describiremos la teoría espectral de operadores autoadjuntos y compactos en espacios de Hilbert. Dicha teoría es la extensión del conocido problema de autovalores para matrices $n \times n$ al caso infinito. Comenzaremos, por tanto, con la definición de autovalores y autovectores[5]

Definición 6.5.1 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador en un espacio normado $\mathbb{X}$. Los números complejos λ tales que*

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{X}, \ x \neq 0, \tag{6.5.1}$$

se denominan autovalores de A y los correspondientes x, autovectores de A asociados al autovalor λ.

En un espacio de dimensión finita podemos definir el *espectro* de un operador como el conjunto de los autovalores de su correspondiente matriz (en alguna base[6]). Puesto que para cualquier matriz $n \times n$ existen n autovalores (pudiendo estar repetidos como ocurre, por ejemplo, con la

[4] Recuérdese que el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ es completo.

[5] También denominados valores propios y vectores propios, respectivamente.

[6] Es un hecho conocido del álgebra lineal que los autovalores de un operador no dependen de la base escogida.

matriz identidad), en el caso finito es relativamente simple de estudiar (ver ejercicio 6.5.3). No ocurre lo mismo en el caso infinito.

Por ejemplo, el operador desplazamiento ya visto antes $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, no tiene autovalores pues la igualdad $Sx = \lambda x$ implica $x = 0$.

Así pues se precisa de una definición más general

Definición 6.5.2 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y A una aplicación lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El espectro de A, que denotaremos por $\sigma(A)$, es el conjunto de números complejos tales que el operador $(\lambda I - A)$ es no invertible, i.e., no existe $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$.*

El operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ se denomina resolvente de A. El conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador A_λ está bien definido se denomina conjunto resolvente de A y se suele denotar por $\rho(A)$. Obviamente el espectro de A, $\sigma(A)$, es el complementario del conjunto resolvente, $\rho(A)$, i.e., $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

La cantidad $r(A) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}$ se denomina radio espectral de A.

Ejercicio 6.5.3 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que en dimensión finita, $\dim \mathbb{X} < +\infty$, $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los autovalores de A.*

De la definición 6.5.2 se sigue que todo autovalor de A pertenece al espectro de A, pero no a la inversa. De hecho existen operadores cuyo espectro no contiene autovalores.

Ejemplo 6.5.4 *Sea el espacio de las funciones continuas $C^\infty_{[a,b]}$ (i.e., en $C_{[a,b]}$ tomamos la norma uniforme). Sea $u \in C_{[a,b]}$ y sea el operador multiplicación (ver ejemplo 6.1.2) $M : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $Mx(t) = f(t)x(t)$, que esta bien definido para todo $x \in C_{[a,b]}$. Este operador no tiene autovalores.*

Obviamente $(M - \lambda I)x(t) = (f(t) - \lambda)x(t)$, luego

$$(M - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{f(t) - \lambda}x(t).$$

El espectro de M es el conjunto de todos los λ tales que $f(t) = \lambda$ para algún $t \in [a, b]$, o sea, $\sigma(M)$ es la imagen de la función $f(t)$, i.e., el rango $\mathcal{I}(u)$. Si la función $f(t) = c$ es constante, entonces $\lambda = c$ es un autovalor

de M (pues $Mx(t) = cx(t)$) que obviamente está en $\sigma(U)$, pero si, por ejemplo, $f(t)$ es una función estrictamente monótona en $[a, b]$, entonces $\sigma(M) = [f(a), f(b)]$, pero la ecuación $Mx(t) = f(t)x(t)$ no tiene ninguna solución no nula, i.e., M no tiene ningún autovalor. ■

Ejercicio 6.5.5 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que $r(A) \leq \|A\|$.*

Del resultado anterior se sigue que $\sigma(A)$ está contenido en el disco cerrado $D = \{z;\ |z| \leq \|A\|\}$. De hecho se tiene el siguiente:

Teorema 6.5.6 *Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Entonces $\sigma(A)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ contenido en el disco cerrado $D = \{z;\ |z| \leq \|A\|\}$.*

Teorema 6.5.7 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto. Entonces todos los autovalores de A (si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Teorema 6.5.8 *Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal acotado y autoadjunto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces $r(A) = \|A\|$.*

Como hemos visto en dimensión infinita un operador lineal A en general puede no tener autovalores, es decir, los valores $\lambda \in \sigma(A)$ no tienen que ser necesariamente solución de la ecuación (6.5.1). No ocurre así con los operadores compactos y autoadjuntos.

Teorema 6.5.9 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto y compacto. Entonces $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$ es un autovalor de A.*

Teorema 6.5.10 *Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.*

Teorema 6.5.11 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces A tiene o bien un número finito de autovalores λ_n reales distintos o, si el número de autovalores es infinito, entonces, es numerable y si los ordenamos de mayor a menor $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Nota 6.5.12 *Una consecuencia de este resultado es que los autoespacios* $\mathbb{X}_k = \ker(\lambda_k I - A)$*, para cada* $\lambda_k \neq 0$*,* $k = 1, 2, 3, \ldots$*, son de dimensión finita. No obstante prueba la pospondremos al teorema espectral 6.5.13.*

Teorema 6.5.13 (Teorema espectral) *Sea* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* A *un operador lineal* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *autoadjunto y compacto. Existe una sucesión numerable (finita o infinita) de autovectores ortonormales* $(x_n)_n$ *de* A *cuya correspondiente sucesión de autovalores denotaremos por* $(\lambda_n)_n$ *tales que,*

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \qquad \forall x \in \mathbb{H}, \tag{6.5.2}$$

donde n *recorre todos los autovalores, incluida su multiplicidad*[7] *Además, se tiene que:*

1. *En (6.5.2) aparecen todos los autovalores de* A*.*
2. *Si la sucesión de autovalores* $(\lambda_n)_n$ *es infinita se puede reordenar de forma que* $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$*.*
3. *Los correspondientes espacios*[8] *subespacios vectoriales* $\ker(\lambda_n I - A)$*, para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *son de dimensión finita, siendo la dimensión de estos el número de veces que aparece un mismo* λ_k *en la fórmula (6.5.2).*

Como hemos visto en el teorema anterior, cuando $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, la dimensión de $\ker(\lambda_k I - A) = p_k$, donde p_k es el número de veces que aparece λ_k en la fórmula (6.5.2). Sea $\mathbb{H}_k = \operatorname{span}(x_{1,k}, \cdots, x_{p_k,k})$ el subespacio generado por los autovectores asociados a cada autovalor λ_k (que sabemos que son finito-dimensionales). Sea el operador $P_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ definido, para cada $k \in \mathbb{N}$ como

$$P_k x = \sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k} = \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} x_{i,k}. \tag{6.5.3}$$

[7] Es decir, si el autovalor λ_k tiene asociado p_k autovectores, en (6.5.2) habrá un sumando para cada uno de los autovectores. Ver la fórmula equivalente (**??**).

[8] El espacio $\ker(\lambda_n I - A)$ no son más que el núcleo del operador $A - \lambda_n I$, i.e., el conjunto de $x \in \mathbb{H}$ tales que $(A - \lambda_n I)x = 0$, i.e., los subespacios vectoriales asociados a cada autovalor λ_n.

Es sencillo comprobar que P_k es un operador de proyección pues es autoadjunto e idempotente (ver ejercicio 6.26).

Usando los operadores P_k anteriores se puede reescribir el teorema espectral 6.5.13 de la siguiente forma equivalente:

$$Ax = \sum_k \lambda_k \sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k}, \qquad \forall x \in \mathbb{H},$$

donde, k recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$. La expresión anterior se puede escribir de forma compacta como sigue:

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x, \tag{6.5.4}$$

donde, n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ siendo P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$ definidos por (6.5.3).

De hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.5.14 *Todo operador autoadjunto y compacto se puede escribir de la forma*

$$A = \sum_n \lambda_n P_n, \tag{6.5.5}$$

donde n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ siendo P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$ definidos por (6.5.3).

Corolario 6.5.15 (Hilbert-Schmidt) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces existe un sistema ortogonal completo (base ortonormal) de vectores ortonormales $(e_n)_n$ de $\mathbb{H}$ consistente en los correspondientes autovectores de A, incluido los asociados al autovalor $\lambda = 0$, caso que lo tuviera.*

Nótese que si denotamos por $(\phi_n)_n$ a la sucesión de autovectores ortonormales (incluyendo la multiplicidad) de A, y por $(\psi_m)_m$ la base ortonormal del núcleo de A, que coincide con el autoespacio asociado al autovalor 0, entonces el corolario anterior nos dice que cualquier $x \in \mathbb{H}$ se puede escribir como combinación lineal del sistema ortonormal $(\phi_n)_n \bigcup (\psi_m)_m$, y por tanto, existe un único $y \in \mathcal{N}(A)$ tal que

$$x = y + \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \langle y, \phi_n \rangle = 0, \ \forall n. \tag{6.5.6}$$

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que todo operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto en $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert separable, se le puede puede hacer corresponder una matriz (finita o infinita) que además es diagonalizable y en cuya diagonal aparecen los correspondientes autovalores.

Supongamos ahora que dos operadores lineales acotados comparten un sistema común de autovectores y que dicho sistema es completo. Es decir que $A\phi_n = \alpha_n\phi_n$ y $B\phi_n = \beta_n\phi_n$, y para todo $x \in \mathbb{H}$ se tiene que $x = \sum_i c_i\phi_i$. Entonces es sencillo comprobar que $(AB - BA)x = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, i.e., A y B conmutan. Una consecuencia del corolario anterior 6.5.15 es que el recíproco de dicho resultado:

Teorema 6.5.16 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert separable. Si A y B conmutan, entonces ambos tienen un sistema común completo de autovectores.*

Antes de terminar este apartado conviene hacer una aclaración. El lector avispado recordará el ejemplo 6.2.9, donde estudiamos el operador definido por (6.2.3). Si comparamos (6.2.3) con (6.5.2) podemos descubrir que efectivamente existen operadores no necesariamente autoadjuntos y compactos que admitan una representación del tipo (6.2.3). En el caso del ejemplo 6.2.9 basta que $\mu_n \not\to 0$ cuando $n \to \infty$ para que no sea compacto, o que μ_n no sean reales para que no sea autoadjunto. De hecho, se puede probar una representación similar a (6.2.3) para operadores autoadjuntos acotados (no necesariamente compactos) e incluso no acotados. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, [6, Capítulos 9 y 10] o [9, Capítulo 13].

Finalmente, queremos hacer notar que los problemas 6.29 y 6.30 muestran dos aplicaciones interesantes de la fórmula (6.5.4), así como del Teorema espectral 6.5.13. De hecho, como se ve en el problema 6.30, es suficiente con saber que existe una descomposición del tipo (6.5.4) para poder resolver un sinnúmero de problemas interesantes.

6.6. Problemas

Problema 6.1 Sea T, $T : L^2_{[0,1]} \mapsto L^2_{[0,1]}$, el operador integral del problema[9] 4.8:

$$y = Tx, \qquad y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{6.6.1}$$

con $k(t,\tau)$ continua en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. Demuestra que el adjunto de dicho operador es el operador $T^* : C_{[0,1]} \mapsto C_{[0,1]}$, $y = T^*x$

$$y(t) = \int_0^1 \overline{k(\tau,t)}x(\tau)d\tau.$$

Luego $T^* = T$ si y sólo si $\overline{k(\tau,t)} = k(t,\tau)$.

Problema 6.2 Sea $(\phi_n)_n$ una base completa del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y sean dos operadores lineales y acotados A, B definidos sobre $\mathbb{H}$. Prueba que si $A\phi_n = B\phi_n$, para todo n, entonces $A = B$.

Problema 6.3 Sean $(e_n)_n$ y $(f_n)_n$ bases ortonormales de los espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$, respectivamente y sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ lineal y acotado. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ converge si y solo si lo hace la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$, en cuyo caso se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2.$$

Deduce, de lo anterior, que la cantidad $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ es independiente de la base ortogonal $(e_n)_n$ escogida.

Problema 6.4 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ un operador lineal y acotado, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ espacios de Hilbert. Se dice que A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt[10] si existe una base ortonormal completa $(\phi_n)_n$ en $\mathbb{H}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2 < +\infty$. Prueba que:

[9] Recordemos que por $L^2_{0,1]}$ denotamos el completamiento del espacio $C^2_{[0,1]}$.

[10] Como hemos visto en el problema anterior 6.3 la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2$ es independiente de la base.

1. El espacio de todos los operadores del tipo Hilbert-Schmidt son un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ de los operadores lineales y acotados, i.e, prueba que si A y B son del tipo Hilbert-Schmidt, entonces $A + B$ y λA también lo son.

2. A es del tipo Hilbert-Schmidt si y solo si A^* lo es.

Problema 6.5 Prueba que el operador integral T del problema 6.1, cuando $k(t, \tau)$ satisface la condición

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t, \tau)|^2 dt d\tau < +\infty, \tag{6.6.2}$$

es un operador del tipo Hilbert-Schmidt (ver problema 6.4).

Problema 6.6 Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces existen dos únicos operadores autoadjuntos[11] A, B de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ tales que

$$T = A + iB, \qquad A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}. \tag{6.6.3}$$

Problema 6.7 Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea A un operador autoadjunto. Prueba que T^*AT es autoadjunto.

Problema 6.8 Prueba que si A es autoadjunto, entonces cualquier polinomio con coeficientes reales de A, i.e., $P_n(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, también es autoadjunto.

Problema 6.9 *Prueba que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, entonces $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{I}(A^*))^\perp$. Es decir, el (espacio) núcleo de un operador lineal acotado coincide con el complemento ortogonal de la imagen (rango) de su adjunto A^*.*

Problema 6.10 Sea un operador lineal y acotado $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que A es antihermítico si $A^* = -A$. Prueba que A es antihermítico si y solo si el operador $B = iA$ es hermítico (autoadjunto).

[11] A la descomposición (6.6.3) se denomina descomposición cartesiana de un operador.

Problema 6.11 Un operador lineal y acotado $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, se dice que es positivo si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$ y se denota por $A \geq 0$. Prueba las siguientes afirmaciones:

1. Si $A \geq 0$ entonces A es autoadjunto (ver teorema 6.2.2).
2. Si $A \geq 0$, $B \geq 0$, y $\alpha \geq 0$, entonces $A + B \geq 0$ y $\alpha A \geq 0$.
3. Si $A \geq 0$ y $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal y acotado, entonces $T^* AT \geq 0$.
4. Cualquiera sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, lineal y acotado, $A^* A \geq 0$.
5. Si $A \geq 0$, $B \geq 0$ y $A+B = \Theta$, entonces $A = B = \Theta$ (Θ es el operador nulo: $\forall x \in \mathbb{H}$, $\Theta x = 0$).
6. Si $A \geq 0$ entonces, para todos $x, y \in \mathbb{H}$ se cumple
$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle.$$
7. Si $A \geq 0$, entonces $Ax = 0$ si y solo si $\langle Ax, x\rangle = 0$ (usa el punto anterior).

Ayuda para probar 6: Usa que $A \geq 0$, i.e., $\langle Av, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{H}$. Elige $v = x + \lambda\langle Ax, y\rangle y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y razona como en la prueba del teorema 5.1.6.

Problema 6.12 Prueba que el operador T definido en el ejemplo 6.2.9 es positivo si y solo si para todo n, $\mu_n \geq 0$. Otro ejemplo de operador positivo es el del operador multiplicación (ver ejemplo 6.1.2) cuando $f(t) \geq 0$ en $[a, b]$.

Problema 6.13 Sean $U, V : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, dos operador unitarios en un espacio de Hilbert $\mathbb{H} \leq \{0\}$. Prueba que

1. U es una isometría, i.e., $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.
2. $\|U\| = 1$.
3. Su inverso U^{-1} es unitario.
4. UV es unitario
5. U es normal.

Problema 6.14 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operador lineal compacto y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ uno acotado, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces los operadores AB y BA son compactos.

Problema 6.15 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, y $\mathcal{I}(A) = \mathbb{H}$. Prueba que si A tiene inverso, y dicho inverso es acotado, entonces el adjunto A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Si además, A es autoadjunto, entonces A^{-1} también lo es.

Problema 6.16 Prueba que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ es compacto y $\mathbb{H}$ es de dimensión infinita, entonces, si existe el inverso de A, A^{-1} no puede ser acotado.

Problema 6.17 Prueba que A es compacto si y solo si A^*A es compacto.

Problema 6.18 Prueba que si A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt, entonces es compacto.

Problema 6.19 Prueba que el operador T definido en el ejemplo 6.2.9 es compacto si y solo si $\mu_n \to 0$.

Problema 6.20 Prueba que el operador $T : L^2_{[0,1]} \mapsto L^2_{[0,1]}$, definido en el problema (6.1), es compacto si se cumple la condición (6.6.2). **Ayuda:** Usa los problemas 6.5 y 6.18.

Problema 6.21 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert un operador autoadjunto. Prueba que si $\langle Ax, x\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = \Theta$, es el operador nulo, incluso en el caso de que $\mathbb{H}$ sea un espacio de Hilbert real.

Problema 6.22 Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert es normal si y solo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.

Problema 6.23 Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, es normal si y solo si los operadores autoadjuntos A y B de su forma cartesiana (6.6.3) conmutan, i.e., $AB = BA$.

Problema 6.24 Prueba que si $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, es normal, entonces $\|T^n\| = \|T\|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 6.25 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, y sea λ un autovalor del mismo. Prueba que si A es positivo, entonces $\lambda \geq 0$ y si A es unitario entonces $|\lambda| = 1$.

Problema 6.26 Prueba que un operador es de proyección (ver problema 5.11) si y solo si es autoadjunto e idempotente.

Problema 6.27 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto. Prueba que si para cierto $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \Theta$ (operador nulo), entonces A es el operador nulo. **Ayuda:** Prueba que A^k es autoadjunto y compacto y usa el teorema espectral para probar que todos autovalores de A^k son cero, de donde se deduce, de nuevo usando el teorema espectral que $A = \Theta$.

Problema 6.28 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto y sea P_n el operador del proyección al subespacio de los autovectores asociados al autovalor λ_n. Prueba que para todo n, $AP_n = \lambda_n P_n$. Usando lo anterior prueba que para $k = 1, 2, \ldots$, $A^k x = \sum_n \lambda_n^k P_n x$ para todo $x \in \mathbb{H}$. De hecho se tiene que $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n$

Problema 6.29 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal autoadjunto y compacto y sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función real tal que $f(\lambda) \to 0$ si $\lambda \to 0$, $f(0) = 0$. En estas condiciones definiremos la función $f(A)$ de la siguiente forma

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{6.6.4}$$

Prueba que el operador $f(A)$ está bien definido y que es lineal, autoadjunto y compacto. Como aplicación encuentra el operador $\sqrt{A}$ de un operador compacto y definido positivo A.

Problema 6.30 Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador lineal tal que se tiene una descomposición espectral de la forma (6.5.2)

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n,$$

donde $(x_n)_n$ es una sucesión ortonormal de vectores de $\mathbb{H}$, $(\lambda_n)_n$ es una sucesión numérica (no necesariamente real) acotada. Si $y \in \mathcal{I}(A)$, entonces una solución de la ecuación $Ax = y$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, x_n \rangle x_n$.

Teoremas, Proposiciones y Problemas para el examen

Teoremas principales: Existencia del operador adjunto 6.1.3, Existencia del operador inverso 6.3.2, Teorema espectral 6.5.13.

Resultados importantes: Probar los siguientes teoremas: Pro. 6.1.4, Teoremas 6.2.2, 6.2.5, 6.2.6, 6.3.8, 6.4.4 6.4.6, 6.4.9, 6.4.10, 6.5.6, 6.5.7, 6.5.8, 6.5.9, 6.5.10, 6.5.11, 6.5.15, 6.5.16. Problemas 6.3, 6.18, 6.29 y 6.30.

Problemas y ejercicios: Probar las afirmaciones de los siguientes ejemplos y ejercicios: 6.2.3, 6.2.8, 6.4.3, 6.5.5. Problemas: 6.2–6.28, a excepción de los 6.3 y 6.18.

Bibliografía

Se recomienda para el tema de espacios métricos, normados y de Hilbert los libros marcados con "m", "n" y "h", respectivamente.

[1] S.K. Berberian. *Introduction to Hilbert space.* AMS Chelsea Publishing, 1999.^{h}

[2] R.P. Boas, Jr. *A Primer of Real Functions.* Mathematical Association of America, Washington D.C., 1997.^{m}

[3] L. Debnath y P. Mikusinsk. *Introduction to Hilbert spaces with applications.* Elsevier, 2005.^{h}

[4] Y. Eidelman, V.D. Milman, A. Tsolomitis. *Functional Analysis: An Introduction*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 66, AMS, RI, 2004.^{m,h}

[5] A.N. Kolmogorov y A.V. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial MIR, Moscú, 1978. (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover, 1999).^{m,h}

[6] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library Edition, New York, 1989.^{m,n}

[7] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods.* Wiley, New York, 1969.

[8] K. Saxe. *Beginning Functional Analysis.* Springer, New York, 2002.^{h}

[9] M. Schechter. *Principles of functional analysis.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 36, AMS, RI, 2002.^{b,h}

[10] J. Tinsley Oden y L.F. Demkowicz. *Applied Functional Analysis.* CRC Press, BR, 2018.[m,n]

[11] N. Young. *An introduction to Hilbert Space.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.[n,h]

[12] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin, 2015.

[13] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis II.* Springer-Verlag, Berlin, 2016.