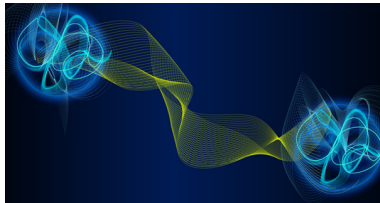


# Mecánica Cuántica en espacios de Hilbert

Renato Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



<https://renato.ryn-fismat.es>

En adelante vamos a usar la notación de Dirac para denotar el producto escalar en un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$ .

Denotaremos el producto escalar  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  por  $\langle \Psi | \Phi \rangle$  y además

$$\langle \Psi | \Phi \rangle := \langle \Psi, \Phi \rangle, \quad \langle \Psi | \mathcal{L} | \Phi \rangle := \langle \Psi | \mathcal{L} \Phi \rangle = \langle \Psi, \mathcal{L} \Phi \rangle. \quad (1)$$

A los productos  $\langle \Psi | \mathcal{L} | \Phi \rangle$  les denominaremos *elementos matriciales* del operador  $\mathcal{L}$ .

En la notación de Dirac se define el adjunto del operador  $\mathcal{U}$  al operador  $\mathcal{U}^*$  tal que para todos  $\Phi$  y  $\Psi$

$$\langle \Phi | \mathcal{U} | \Psi \rangle = \langle \Phi | \mathcal{U} \Psi \rangle = \overline{\langle \mathcal{U} \Psi | \Phi \rangle} = \overline{\langle \Psi | \mathcal{U}^* | \Phi \rangle} = \overline{\langle \Psi | \mathcal{U}^* | \Phi \rangle}$$

Si  $\mathcal{U}$  es autoadjunto  $\Rightarrow \langle \mathcal{U} \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{U} \Phi \rangle \Leftrightarrow \langle \Phi | \mathcal{U} | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \mathcal{U} | \Phi \rangle}$ .

## Definición

Un operador  $\mathcal{U}$  se denomina unitario si  $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ .

## Definición

Sea  $\mathcal{U}$  un operador unitario. La transformación

$$\Psi \mapsto \psi = \mathcal{U}^*\Psi, \quad \mathcal{L} \mapsto \ell = \mathcal{U}^*\mathcal{L}\mathcal{U},$$

la denominaremos **transformación unitaria** de  $\Psi$  y  $\mathcal{L}$ .

## Definición

Un operador  $\mathcal{U}$  se denomina unitario si  $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ .

## Definición

Sea  $\mathcal{U}$  un operador unitario. La transformación

$$\Psi \mapsto \psi = \mathcal{U}^*\Psi, \quad \mathcal{L} \mapsto \ell = \mathcal{U}^*\mathcal{L}\mathcal{U},$$

la denominaremos **transformación unitaria** de  $\Psi$  y  $\mathcal{L}$ .

## Proposición

Las transformaciones unitarias conservan

- 1 Las relaciones de conmutación de los operadores.
- 2 La propiedad de hermiticidad de un operador.
- 3 Los autovalores de un operador.
- 4 Los productos escalares y elementos matriciales de  $\mathcal{L}$ .

Demostración: Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{L}$  tres operadores y  $a$ ,  $b$  y  $\ell$  sus correspondientes operadores tras realizar la transformación unitaria.

1. Como  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{L} \Rightarrow$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}^* \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{U} - \mathcal{U}^* \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{U} = \mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U} = \ell \quad \Longrightarrow$$

$$(\mathcal{U}^* \mathcal{A} \mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{B} \mathcal{U}) - (\mathcal{U}^* \mathcal{B} \mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{A} \mathcal{U}) = a b - b a \quad \Longrightarrow \quad [a, b] = \ell.$$

Demostración: Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{L}$  tres operadores y  $a$ ,  $b$  y  $\ell$  sus correspondientes operadores tras realizar la transformación unitaria.

1. Como  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{L} \Rightarrow$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{U} - \mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U} = \ell \quad \Longrightarrow$$

$$(\mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{U}) - (\mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{U}) = a b - b a \quad \Longrightarrow \quad [a, b] = \ell.$$

2. Sea  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* \Rightarrow \ell = \mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U} \Rightarrow \ell^* = (\mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U})^* = \mathcal{U}^* \mathcal{L}^* \mathcal{U} = \mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U} = \ell.$

3. Sea  $\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$ , entonces  $(\mathcal{U}^* \mathcal{L} \mathcal{U})(\mathcal{U}^* \Psi) = \lambda(\mathcal{U}^* \Psi) \Rightarrow \ell\psi = \lambda\psi.$

Demostración: Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{L}$  tres operadores y  $a$ ,  $b$  y  $\ell$  sus correspondientes operadores tras realizar la transformación unitaria.

1. Como  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{L} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{L} &\implies \mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{U} - \mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U} = \ell \implies \\ (\mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{U}) - (\mathcal{U}^* \mathcal{B}\mathcal{U})(\mathcal{U}^* \mathcal{A}\mathcal{U}) = a b - b a &\implies [a, b] = \ell. \end{aligned}$$

2. Sea  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* \Rightarrow \ell = \mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U} \Rightarrow \ell^* = (\mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U})^* = \mathcal{U}^* \mathcal{L}^* \mathcal{U} = \mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U} = \ell$ .

3. Sea  $\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$ , entonces  $(\mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U})(\mathcal{U}^* \Psi) = \lambda(\mathcal{U}^* \Psi) \Rightarrow \ell\psi = \lambda\psi$ .

4.  $\langle \Psi_1 | \mathcal{L} | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | \mathcal{U}\mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U}\mathcal{U}^* | \Psi_2 \rangle = \langle \mathcal{U}^* \Psi_1 | \mathcal{U}^* \mathcal{L}\mathcal{U} | \mathcal{U}^* \Psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \ell | \psi_2 \rangle$ .

Supongamos que  $\mathcal{L}$  es un operador que tiene asociados un conjunto numerable de autovectores  $(\Psi_n)_n$  y que además dicho conjunto es un sistema completo en  $\mathbb{H}$ .



Supongamos que  $\mathcal{L}$  es un operador que tiene asociados un conjunto numerable de autovectores  $(\Psi_n)_n$  y que además dicho conjunto es un sistema completo en  $\mathbb{H}$ .

Si todos los autovalores son simples entonces, los correspondientes autovectores son ortogonales. En el caso de que tengamos autovalores múltiples sus correspondientes autovectores se pueden ortogonalizar usando el método de Gram-Schmidt  $\Rightarrow$

Asumiremos que  $(\Psi_n)_n$  es un sistema ortonormal (i.e.,  $\|\Psi_n\| = 1$ ).

## Los operadores en Mecánica Cuántica

Supongamos que  $\mathcal{L}$  es un operador que tiene asociados un conjunto numerable de autovectores  $(\Psi_n)_n$  y que además dicho conjunto es un sistema completo en  $\mathbb{H}$ .

Si todos los autovalores son simples entonces, los correspondientes autovectores son ortogonales. En el caso de que tengamos autovalores múltiples sus correspondientes autovectores se pueden ortogonalizar usando el método de Gram-Schmidt  $\Rightarrow$

Asumiremos que  $(\Psi_n)_n$  es un sistema ortonormal (i.e.,  $\|\Psi_n\| = 1$ ).

Sea  $\Phi$  un vector cualquiera de  $\mathbb{H}$ , entonces  $\Phi$  se puede desarrollar en serie de Fourier respecto  $(\Psi_n)_n$ ,  $c_n$  **coef. de Fourier**

$$\Phi = \sum_n c_n \Psi_n, \quad c_n = \langle \Phi | \Psi_n \rangle$$

En otras palabras,  $(\Psi_n)_n$  es una *base ortonormal completa* de  $\mathbb{H}$ .

Las bases juegan un papel fundamental. En particular las bases asociadas a operadores hermíticos.

Las bases juegan un papel fundamental. En particular las bases asociadas a operadores hermíticos.

Sea  $(\Psi_n)_n$  una base ortonormal completa de  $\mathbb{H}$  y sea  $\mathcal{A}$  un operador lineal, entonces

$$\mathcal{A}\Psi_n \in \mathbb{H} \implies \mathcal{A}\Psi_n = \sum_m A_{m,n} |\Psi_m\rangle \implies A_{m,n} = \langle \Psi_m | \mathcal{A} | \Psi_n \rangle.$$

A la cantidad  $\langle \Psi_m | \mathcal{A} | \Psi_n \rangle$  la denominaremos elemento matricial del operador  $\mathcal{A}$  en la base  $(\Psi_n)_n$ .

Las bases juegan un papel fundamental. En particular las bases asociadas a operadores hermíticos.

Sea  $(\Psi_n)_n$  una base ortonormal completa de  $\mathbb{H}$  y sea  $\mathcal{A}$  un operador lineal, entonces

$$\mathcal{A}\Psi_n \in \mathbb{H} \implies \mathcal{A}\Psi_n = \sum_m A_{m,n} |\Psi_m\rangle \implies A_{m,n} = \langle \Psi_m | \mathcal{A} | \Psi_n \rangle.$$

A la cantidad  $\langle \Psi_m | \mathcal{A} | \Psi_n \rangle$  la denominaremos elemento matricial del operador  $\mathcal{A}$  en la base  $(\Psi_n)_n$ .

☞ Si  $(\Psi_n)_n$  es la base asociada al operador hermítico  $\mathcal{L}$  se dice que la matriz  $A = (A_{m,n})$  es la matriz de  $\mathcal{A}$  en la  $\mathcal{L}$ -representación. Nótese que la matriz del operador  $\mathcal{L}$  en su propia representación (la  $\mathcal{L}$ -representación) es diagonal con los autovalores en la diagonal.

## Proposición

El conmutador  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  de dos operadores hermíticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es tal que

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{L},$$

con  $\mathcal{L}$  hermítico.

## Proposición

❶ Si dos operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$  tienen un sistema completo de autovectores  $(\Psi_n)_n$  común, entonces  $[\mathcal{L}, \mathcal{N}] = 0$ .

## Proposición

El conmutador  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  de dos operadores hermíticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es tal que

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{L},$$

con  $\mathcal{L}$  hermítico.

## Proposición

❶ Si dos operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$  tienen un sistema completo de autovectores  $(\Psi_n)_n$  común, entonces  $[\mathcal{L}, \mathcal{N}] = 0$ .

❷ Si dos operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$  con sistemas completos de autovectores conmutan ( $[\mathcal{L}, \mathcal{N}] = 0$ ), entonces tienen un sistema completo de autovectores  $(\Psi_n)_n$  común.

## Definición

Sea  $F(z)$  una función analítica en un entorno de  $z = 0$  y sea  $F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  su desarrollo en serie de potencias. Definiremos al operador  $F(\mathcal{L})$  mediante la serie

$$F(\mathcal{L}) = \sum_{n \geq 0} f_n \mathcal{L}^n.$$

Ejercicio: Si  $\mathcal{L}$  es acotado el operador  $F(\mathcal{L})$  anterior está bien definido.

Sea  $\mathcal{A}$  hermítico. El operador  $\mathcal{U}(\alpha) = e^{i\alpha\mathcal{A}}$  es unitario.



## Definición

Sea  $F(z)$  una función analítica en un entorno de  $z = 0$  y sea  $F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  su desarrollo en serie de potencias. Definiremos al operador  $F(\mathcal{L})$  mediante la serie

$$F(\mathcal{L}) = \sum_{n \geq 0} f_n \mathcal{L}^n.$$

Ejercicio: Si  $\mathcal{L}$  es acotado el operador  $F(\mathcal{L})$  anterior está bien definido.

Sea  $\mathcal{A}$  hermítico. El operador  $\mathcal{U}(\alpha) = e^{i\alpha\mathcal{A}}$  es unitario.

## Definición

La derivada operacional  $\partial F(\mathcal{L})/\partial \mathcal{L}$  es el operador que se obtiene mediante la fórmula

$$\frac{\partial F(\mathcal{L})}{\partial \mathcal{L}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathcal{L} + \varepsilon \mathcal{J}) - F(\mathcal{L})}{\varepsilon}.$$

**Ejemplo:**  $\frac{\partial \mathcal{L}^n}{\partial \mathcal{L}} = n\mathcal{L}^{n-1}.$

## Lema

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \alpha \mathcal{I}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}^k] = \alpha k \mathcal{B}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

## Lema

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \alpha \mathcal{I}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}^k] = \alpha k \mathcal{B}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Demostración: Por inducción ...



## Lema

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \alpha \mathcal{J}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}^k] = \alpha k \mathcal{B}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Demostración: Por inducción ...

□

## Proposición

Si  $F(z)$  es una función analítica en un entorno de  $z = 0$  y sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{J}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, F(\mathcal{B})] = \frac{\partial F(\mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}}.$$

## Lema

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \alpha \mathcal{J}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}^k] = \alpha k \mathcal{B}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Demostración: Por inducción ...

□

## Proposición

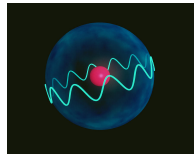
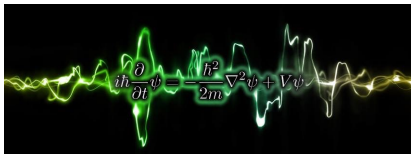
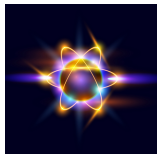
Si  $F(z)$  es una función analítica en un entorno de  $z = 0$  y sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tales que  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{J}$ . Entonces

$$[\mathcal{A}, F(\mathcal{B})] = \frac{\partial F(\mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}}.$$

Demostración: Basta escribir la serie de potencias de  $F$  y el Lema

□

# Postulados de la Mecánica cuántica



## Postulado

*A cada sistema físico se le hace corresponder un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  apropiado. Además, para cada  $t \in \mathbb{R}$  (parámetro correspondiente al tiempo) el estado queda completamente caracterizado (hasta un factor constante) por un vector  $\Psi$  normalizado a la unidad de  $\mathbb{H}$ .*

## Postulado

*A cada sistema físico se le hace corresponder un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  apropiado. Además, para cada  $t \in \mathbb{R}$  (parámetro correspondiente al tiempo) el estado queda completamente caracterizado (hasta un factor constante) por un vector  $\Psi$  normalizado a la unidad de  $\mathbb{H}$ .*

- 1  $\forall t$  el estado está determinado por un vector de  $\mathbb{H}$  tal que  $\|\Psi\| = 1$ . Si dos vectores no nulos son tales que  $\Psi_1 = c\Psi_2$ , ambos representan el mismo estado.



## Postulado

*A cada sistema físico se le hace corresponder un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  apropiado. Además, para cada  $t \in \mathbb{R}$  (parámetro correspondiente al tiempo) el estado queda completamente caracterizado (hasta un factor constante) por un vector  $\Psi$  normalizado a la unidad de  $\mathbb{H}$ .*

- 1  $\forall t$  el estado está determinado por un vector de  $\mathbb{H}$  tal que  $\|\Psi\| = 1$ . Si dos vectores no nulos son tales que  $\Psi_1 = c\Psi_2$ , ambos representan el mismo estado.
- 2 Dados los estados  $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ , la combinación lineal

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k$$

también es un (posible) estado.

## Postulado

*A cada sistema físico se le hace corresponder un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  apropiado. Además, para cada  $t \in \mathbb{R}$  (parámetro correspondiente al tiempo) el estado queda completamente caracterizado (hasta un factor constante) por un vector  $\Psi$  normalizado a la unidad de  $\mathbb{H}$ .*

- 1  $\forall t$  el estado está determinado por un vector de  $\mathbb{H}$  tal que  $\|\Psi\| = 1$ . Si dos vectores no nulos son tales que  $\Psi_1 = c\Psi_2$ , ambos representan el mismo estado.
- 2 Dados los estados  $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ , la combinación lineal

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k$$

también es un (posible) estado.

- 3  $\forall t \in \mathbb{R}$  si el vector  $\Psi \neq 0$ , siempre se puede normalizar a la unidad.

### Postulado

*A cada magnitud física medible (observable)  $L$  se le hace corresponder un operador lineal hermítico  $\mathcal{L}$  que actúa en  $\mathbb{H}$ .*

### Postulado

*A cada magnitud física medible (observable)  $L$  se le hace corresponder un operador lineal hermítico  $\mathcal{L}$  que actúa en  $\mathbb{H}$ .*

Conviene recordar que los operadores hermíticos son tales que sus autovalores siempre son reales.

### Postulado

*Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .*

### Postulado

*Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .*

Este postulado requiere una aclaración.

### Postulado

*Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .*

Este postulado requiere una aclaración. Al hacer una medición de  $\mathcal{L}$  el sistema cambia (*las mediciones interfieren en el sistema*).

### Postulado

Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .

Este postulado requiere una aclaración. Al hacer una medición de  $\mathcal{L}$  el sistema cambia (*las mediciones interfieren en el sistema*).

Antes de medir  $L$  el sistema puede estar, **formalmente**, en **cualquier** estado  $\Psi$ , pero al realizar la medición, ésta *cambia al sistema* quedando este un estado determinado por uno de los autovectores  $\Psi_\lambda$  de  $\mathcal{L}$  correspondiente a al autovalor  $\lambda$ , resultado de la medición.



### Postulado

Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .

Este postulado requiere una aclaración. Al hacer una medición de  $\mathcal{L}$  el sistema cambia (*las mediciones interfieren en el sistema*).

Antes de medir  $L$  el sistema puede estar, **formalmente**, en **cualquier** estado  $\Psi$ , pero al realizar la medición, ésta *cambia al sistema* quedando este un estado determinado por uno de los autovectores  $\Psi_\lambda$  de  $\mathcal{L}$  correspondiente a al autovalor  $\lambda$ , resultado de la medición. En el lenguaje de los físicos: la medición produce el *colapso de la función*  $\Psi$  a una de las  $\Psi_\lambda$ .

### Postulado

Sea  $\Psi$  el estado del sistema en el momento  $t$  justo antes de la medición de la magnitud (observable)  $L$  (asociada al operador  $\mathcal{L}$ ). Independientemente de cuál sea el estado original  $\Psi$ , el resultado de la medición sólo puede ser un autovalor de  $\mathcal{L}$ .

Este postulado requiere una aclaración. Al hacer una medición de  $\mathcal{L}$  el sistema cambia (*las mediciones interfieren en el sistema*).

Antes de medir  $L$  el sistema puede estar, **formalmente**, en **cualquier** estado  $\Psi$ , pero al realizar la medición, ésta *cambia al sistema* quedando este un estado determinado por uno de los autovectores  $\Psi_\lambda$  de  $\mathcal{L}$  correspondiente a al autovalor  $\lambda$ , resultado de la medición. En el lenguaje de los físicos: la medición produce el *colapso de la función  $\Psi$*  a una de las  $\Psi_\lambda$ .

Este axioma introduce formalmente la interpretación de Copenhage en la teoría y resuelve la paradoja del  *La teoría explica lo que se puede medir*

### Postulado

*El valor esperado  $\langle L \rangle$  de una cantidad física  $L$  cuando el sistema se encuentra en el estado  $\Psi$  viene dado por el elemento matricial*

$$\langle L \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle.$$

### Postulado

*El valor esperado  $\langle L \rangle$  de una cantidad física  $L$  cuando el sistema se encuentra en el estado  $\Psi$  viene dado por el elemento matricial*

$$\langle L \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle.$$

Nótese que, como  $\mathcal{L}$  es hermítico, entonces  $\langle L \rangle \in \mathbb{R}$ .

## Postulado

*El valor esperado  $\langle L \rangle$  de una cantidad física  $L$  cuando el sistema se encuentra en el estado  $\Psi$  viene dado por el elemento matricial*

$$\langle L \rangle = \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle.$$

Nótese que, como  $\mathcal{L}$  es hermítico, entonces  $\langle L \rangle \in \mathbb{R}$ .

En particular, si  $\lambda$  es un autovalor de  $\mathcal{L}$  correspondiente al autovector  $\Psi$  entonces de lo anterior se sigue que  $\langle L \rangle = \lambda$ .

Además  $\langle L^2 \rangle = \lambda^2$ , luego la varianza  $\Delta L := \sqrt{\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2} = 0$ .

## Postulado

*Los elementos matriciales de los operadores  $x_i$  de la posición (coordenadas)  $x_i$  y  $p_i$  de los momentos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde los índices  $i = 1, 2, 3$  corresponden a las proyecciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, definidos por  $\langle \Phi | x_i | \Psi \rangle$  y  $\langle \Phi | p_i | \Psi \rangle$ , cualquiera sean  $\Phi$  y  $\Psi$  de  $\mathbb{H}$  satisfacen las ecuaciones de evolución*

## Postulado

Los elementos matriciales de los operadores  $x_i$  de la posición (coordenadas)  $x_i$  y  $p_i$  de los momentos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde los índices  $i = 1, 2, 3$  corresponden a las proyecciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, definidos por  $\langle \Phi | x_i | \Psi \rangle$  y  $\langle \Phi | p_i | \Psi \rangle$ , cualquiera sean  $\Phi$  y  $\Psi$  de  $\mathbb{H}$  satisfacen las ecuaciones de evolución

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | x_i | \Psi \rangle = \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right| \Psi \right\rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \Phi | p_i | \Psi \rangle = - \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right| \Psi \right\rangle,$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador asociado a la función de Hamilton del correspondiente sistema clásico (si es que lo hay).

## Postulado

Los elementos matriciales de los operadores  $x_i$  de la posición (coordenadas)  $x_i$  y  $p_i$  de los momentos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde los índices  $i = 1, 2, 3$  corresponden a las proyecciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, definidos por  $\langle \Phi | x_i | \Psi \rangle$  y  $\langle \Phi | p_i | \Psi \rangle$ , cualquiera sean  $\Phi$  y  $\Psi$  de  $\mathbb{H}$  satisfacen las ecuaciones de evolución

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | x_i | \Psi \rangle = \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right| \Psi \right\rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \Phi | p_i | \Psi \rangle = - \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right| \Psi \right\rangle,$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador asociado a la función de Hamilton del correspondiente sistema clásico (si es que lo hay).

Este postulado es equivalente a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi.$$



Este postulado tiene un significado físico evidente pues nos indica que el promedio de las cantidades medibles posición, impulso y energía (hamiltoniano) satisfacen las ecuaciones dinámicas de la mecánica hamiltoniana, i.e, en el *límite apropiado* (" $\hbar \rightarrow 0$ ") la mecánica cuántica se transforma en la clásica (principio de correspondencia de Bohr).

Este postulado tiene un significado físico evidente pues nos indica que el promedio de las cantidades medibles posición, impulso y energía (hamiltoniano) satisfacen las ecuaciones dinámicas de la mecánica hamiltoniana, i.e, en el *límite apropiado* (" $\hbar \rightarrow 0$ ") la mecánica cuántica se transforma en la clásica (principio de correspondencia de Bohr).

☞ **Proceden unas aclaraciones.** En general el Hamiltoniano  $H$  de un sistema clásico depende de las coordenadas  $x_i$  y los impulsos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , por lo que el operador  $\mathcal{H}$  se obtiene cambiando las  $x_i$  por los correspondientes operadores  $\mathcal{X}_i$  y  $p_i$  por  $\mathcal{P}_i$ .

Esto, aunque en apariencia es *trivial*, en general no lo es pues  $\mathcal{H}$  debe ser hermítico (ya que corresponde a la magnitud física energía).

## Postulado

Los operadores posición  $x_i$  e impulso  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , satisfacen las relaciones de conmutación

$$[x_k, x_j] = 0 = [\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_j], \quad [x_k, \mathcal{P}_j] = i\hbar\delta_{k,j}\mathcal{J},$$

donde  $\hbar$  es una constante e  $i = \sqrt{-1}$ .

## Postulado

Los operadores posición  $x_i$  e impulso  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , satisfacen las relaciones de conmutación

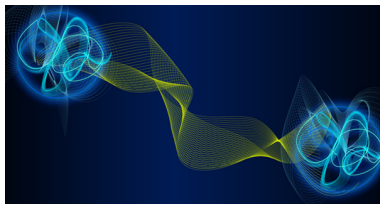
$$[x_k, x_j] = 0 = [\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_j], \quad [x_k, \mathcal{P}_j] = i\hbar\delta_{k,j}\mathcal{J},$$

donde  $\hbar$  es una constante e  $i = \sqrt{-1}$ .

En particular, de lo anterior se sigue que los operadores  $x_k$  y  $\mathcal{P}_k$  no pueden tener un conjunto completo de autovectores comunes.

☞ Este postulado es el análogo al de las llaves de Poisson en la mecánica analítica (clásica).

# Discusión e implicaciones de los postulados





*Hasta ahora, la teoría de las formas cuadráticas (o hermíticas) [matrices asociadas a los operadores] de infinitas variables se ha desarrollado principalmente para una clase especial (formas "acotadas"). Pero aquí nos interesan las formas no acotadas. Sin embargo, podemos suponer que, en general, las reglas se aplican de la misma manera.*

*Zur Quantenmechanik. II.* (Sobre la mecánica cuántica II), ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK escrito por Born, Heisenberg y Jordan (enviado en noviembre de 1925 y publicado en enero de 1926).



*Hasta ahora, la teoría de las formas cuadráticas (o hermíticas) [matrices asociadas a los operadores] de infinitas variables se ha desarrollado principalmente para una clase especial (formas "acotadas"). Pero aquí nos interesan las formas no acotadas. Sin embargo, podemos suponer que, en general, las reglas se aplican de la misma manera.*

*Zur Quantenmechanik. II.* (Sobre la mecánica cuántica II), ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK escrito por Born, Heisenberg y Jordan (enviado en noviembre de 1925 y publicado en enero de 1926).

La teoría de operadores hermíticos no acotados fue desarrollada por John von Neumann entre 1927 y 1929.

## 1 Construyendo los operadores cuánticos

Supongamos que tenemos una magnitud clásica  $L$  que depende de  $x_i$  y  $p_i$ . Para construir el operador mecano-cuántico sólo tenemos que cambiar los  $x_i$  por los  $\mathcal{X}_i$  y  $p_i$  por  $\mathcal{P}_i$ .



## 1 Construyendo los operadores cuánticos

Supongamos que tenemos una magnitud clásica  $L$  que depende de  $x_i$  y  $p_i$ . Para construir el operador mecano-cuántico sólo tenemos que cambiar los  $x_i$  por los  $\mathcal{X}_i$  y  $p_i$  por  $\mathcal{P}_i$ .

Por ejemplo, la energía cinética viene dada por

$$T = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m},$$

y  $V(x_1, x_2, x_3)$  por  $\hat{V} = V(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3)$ , siendo ambos operadores hermíticos.

## 1 Construyendo los operadores cuánticos

Supongamos que tenemos una magnitud clásica  $L$  que depende de  $x_i$  y  $p_i$ . Para construir el operador mecano-cuántico sólo tenemos que cambiar los  $x_i$  por los  $\mathcal{X}_i$  y  $p_i$  por  $\mathcal{P}_i$ .

Por ejemplo, la energía cinética viene dada por

$$T = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m},$$

y  $V(x_1, x_2, x_3)$  por  $\hat{V} = V(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3)$ , siendo ambos operadores hermíticos.

Esto no siempre ocurre. Imaginemos que el hamiltoniano contiene el término  $W_i = x_i p_i$ . Entonces, el operador  $\hat{W}_i = \mathcal{X}_i \mathcal{P}_i$  no puede representar al operador cuántico ya que no es hermítico ( $\mathcal{X}_i$  y  $\mathcal{P}_i$  no conmutan.)

## 1 Construyendo los operadores cuánticos

Supongamos que tenemos una magnitud clásica  $L$  que depende de  $x_i$  y  $p_i$ . Para construir el operador mecano-cuántico sólo tenemos que cambiar los  $x_i$  por los  $\mathcal{X}_i$  y  $p_i$  por  $\mathcal{P}_i$ .

Por ejemplo, la energía cinética viene dada por

$$T = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} \implies \hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m},$$

y  $V(x_1, x_2, x_3)$  por  $\hat{V} = V(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3)$ , siendo ambos operadores hermíticos.

Esto no siempre ocurre. Imaginemos que el hamiltoniano contiene el término  $W_i = x_i p_i$ . Entonces, el operador  $\hat{W}_i = \mathcal{X}_i \mathcal{P}_i$  no puede representar al operador cuántico ya que no es hermítico ( $\mathcal{X}_i$  y  $\mathcal{P}_i$  no conmutan.) En este caso hay que definir  $\hat{W}_i$  por

$$\hat{W}_i = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_i \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_i \mathcal{X}_i).$$

### La regla de conmutación $[X, P]$

Un resultado clásico de mecánica analítica es que a cualquier cantidad física clásica  $L$  le podemos adicionar la cantidad  $x_i p_j - p_j x_i = 0$  sin cambiarla.

Si transformamos  $L$  en su operador  $\mathcal{L}$  ya no le podemos adicionar el correspondiente operador  $X\mathcal{P} - \mathcal{P}X$  pues éste no es nulo (postulado VI).

Tomando las derivadas funcionales

$$\frac{\partial}{\partial X}(X\mathcal{P} - \mathcal{P}X) = \frac{\partial}{\partial P}(X\mathcal{P} - \mathcal{P}X) = 0,$$

i.e.,  $X\mathcal{P} - \mathcal{P}X$  es proporcional a  $\mathcal{J} \implies X\mathcal{P} - \mathcal{P}X = \alpha\mathcal{J}$ .

### La regla de conmutación $[x, \mathcal{P}]$

Un resultado clásico de mecánica analítica es que a cualquier cantidad física clásica  $L$  le podemos adicionar la cantidad  $x_i p_j - p_j x_i = 0$  sin cambiarla.

Si transformamos  $L$  en su operador  $\mathcal{L}$  ya no le podemos adicionar el correspondiente operador  $x\mathcal{P} - \mathcal{P}x$  pues éste no es nulo (postulado VI).

Tomando las derivadas funcionales

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\mathcal{P} - \mathcal{P}x) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}}(x\mathcal{P} - \mathcal{P}x) = 0,$$

i.e.,  $x\mathcal{P} - \mathcal{P}x$  es proporcional a  $\mathcal{J} \implies x\mathcal{P} - \mathcal{P}x = \alpha\mathcal{J}$ .

Pero  $x$  y  $\mathcal{P}$  son hermíticos entonces, necesariamente,  $\alpha = i\hbar$  donde  $\hbar \in \mathbb{R}$ .

### La regla de conmutación $[\mathcal{X}, \mathcal{P}]$

Un resultado clásico de mecánica analítica es que a cualquier cantidad física clásica  $L$  le podemos adicionar la cantidad  $x_i p_j - p_j x_i = 0$  sin cambiarla.

Si transformamos  $L$  en su operador  $\mathcal{L}$  ya no le podemos adicionar el correspondiente operador  $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X}$  pues éste no es nulo (postulado VI).

Tomando las derivadas funcionales

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{X}}(\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}}(\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X}) = 0,$$

i.e.,  $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X}$  es proporcional a  $\mathcal{J} \implies \mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X} = \alpha\mathcal{J}$ .

Pero  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{P}$  son hermíticos entonces, necesariamente,  $\alpha = i\hbar$  donde  $\hbar \in \mathbb{R}$ .

Esta es la relación de conmutación del postulado VI.

El espacio de Hilbert más habitual en MC es  $L^2(\Omega)$ . En  $L^2(\Omega)$  se puede probar que si

$$x := x\mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad x^k \Psi(x) = x^k \Psi(x)$$

Además

$$[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

El espacio de Hilbert más habitual en MC es  $L^2(\Omega)$ . En  $L^2(\Omega)$  se puede probar que si

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}\mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{X}^k \Psi(x) = x^k \Psi(x)$$

Además

$$[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

A partir de lo anterior se puede deducir que

$$\mathcal{P}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Es fácil comprobar que:  $[\mathcal{P}, \mathcal{X}] = \mathcal{P}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{P} = -i\hbar\mathcal{J}$ .



El espacio de Hilbert más habitual en MC es  $L^2(\Omega)$ . En  $L^2(\Omega)$  se puede probar que si

$$x := x\mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad x^k \Psi(x) = x^k \Psi(x)$$

Además

$$[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

A partir de lo anterior se puede deducir que

$$\mathcal{P}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Es fácil comprobar que:  $[\mathcal{P}, x] = \mathcal{P}x - x\mathcal{P} = -i\hbar\mathcal{J}$ .

**Ejercicio:** Usando lo anterior prueba que si  $F(z)$  es una función analítica

$$[x, F(\mathcal{P})] = i\hbar \frac{\partial F(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}.$$

Supongamos el sistema físico se encuentra en el estado definido por  $\Psi_n$ , autovector correspondiente al autovalor  $\lambda_n$  de cierto operador  $\mathcal{L}$  asociado a la magnitud física  $L$ . Entonces

$$\langle \Psi_n | \mathcal{L} | \Psi_n \rangle = \lambda_n, \quad \langle \Psi_n | \mathcal{L}^k | \Psi_n \rangle = \lambda_n^k,$$

Supongamos ahora que el sistema se encuentra en el estado  $\Phi$  que es en una superposición de los estados  $\Psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , entonces como  $\Phi = \sum_k c_k \Psi_k$  tenemos

$$\langle \Phi | \mathcal{L} | \Phi \rangle = \sum_k |c_k|^2 \lambda_k.$$

Lo anterior indica, en virtud de postulado IV que la cantidad  $|c_k|^2$  es la probabilidad con que se observa el valor  $\lambda_k$  al hacer una medición.

Consideremos por sencillez el caso cuando el autovalor  $\lambda_k$  es simple. En ese caso la probabilidad de que el sistema estando en un estado original  $\Phi$  termine en el estado definido por  $\Psi_k$  es

$$\text{Prob}(\Phi \mapsto \Psi_k) = |c_k|^2 = |\langle \Phi | \Psi_k \rangle|^2.$$

Consideremos por sencillez el caso cuando el autovalor  $\lambda_k$  es simple. En ese caso la probabilidad de que el sistema estando en un estado original  $\Phi$  termine en el estado definido por  $\Psi_k$  es

$$\text{Prob}(\Phi \mapsto \Psi_k) = |c_k|^2 = |\langle \Phi | \Psi_k \rangle|^2.$$

Nótese que la probabilidad es **invariante ante transformaciones unitarias**:

$$\Psi_k \mapsto \mathcal{U}\Psi_k = \tilde{\Psi}_k, \quad \Phi \mapsto \mathcal{U}\Phi = \tilde{\Phi}$$

pues

Consideremos por sencillez el caso cuando el autovalor  $\lambda_k$  es simple. En ese caso la probabilidad de que el sistema estando en un estado original  $\Phi$  termine en el estado definido por  $\Psi_k$  es

$$\text{Prob}(\Phi \mapsto \Psi_k) = |c_k|^2 = |\langle \Phi | \Psi_k \rangle|^2.$$

Nótese que la probabilidad es **invariante ante transformaciones unitarias**:

$$\Psi_k \mapsto \mathcal{U}\Psi_k = \tilde{\Psi}_k, \quad \Phi \mapsto \mathcal{U}\Phi = \tilde{\Phi}$$

pues

$$\text{Prob}(\Phi \mapsto \Psi_k) = \text{Prob}(\tilde{\Phi} \mapsto |\tilde{\Psi}_k\rangle)$$

El sistema físico es invariante frente a cualquier transformación unitaria!

Lo anterior se puede ver muy bien usando los operadores de proyección o proyectores.

Imaginemos que tenemos la magnitud  $L$  y que el resultado de la medición es en valor  $\lambda_k$  que asumiremos simple. Tras la medición el sistema estará en el estado  $\Psi_k$ , donde  $\Psi_k$  es el autovector asociado a  $\lambda_k$ .

Definamos el **operador de proyección**  $P_k$  sobre el subespacio generado por  $\Psi_k$  de la siguiente forma

$$P_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \quad P_k \Psi = \langle \Psi | \Psi_k \rangle \Psi_k.$$

### 3 Los operadores de proyección

De la definición se tiene que

- 1  $\mathcal{P}_k$  es hermítico:  $\mathcal{P}_k^* = \mathcal{P}_k$  y  $\mathcal{P}_k^2 := \mathcal{P}_k \circ \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k$
- 2 Los autovalores de  $\mathcal{P}_k$  son 0 ó 1.

### 3 Los operadores de proyección

De la definición se tiene que

- 1  $\mathcal{P}_k$  es hermítico:  $\mathcal{P}_k^* = \mathcal{P}_k$  y  $\mathcal{P}_k^2 := \mathcal{P}_k \circ \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k$
- 2 Los autovalores de  $\mathcal{P}_k$  son o 0 ó 1.

¿Y si  $\lambda_k$  es degenerado, i.e., tiene asociado un subespacio de dim.  $K > 1$ ?



### 3 Los operadores de proyección

De la definición se tiene que

- 1  $\mathcal{P}_k$  es hermítico:  $\mathcal{P}_k^* = \mathcal{P}_k$  y  $\mathcal{P}_k^2 := \mathcal{P}_k \circ \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k$
- 2 Los autovalores de  $\mathcal{P}_k$  son 0 ó 1.

¿Y si  $\lambda_k$  es degenerado, i.e., tiene asociado un subespacio de dim.  $K > 1$ ?

En ese caso  $\mathcal{P}_k$  es la suma de los proyectores asociados a cada uno de los vectores de la base ortonormal  $(\Psi_{k,j})_{j=1}^K$  del autoespacio asociado a  $\lambda_k$

$$\mathcal{P}_k \Psi = \sum_{j=1}^K \langle \Psi_{k,j} | \Psi \rangle \Psi_{k,j}$$

**Ejercicio:** Comprobar que en este caso se tiene las mismas propiedades que el caso  $K = 1$ .

## Los operadores de proyección y las mediciones

Todo lo anterior nos lleva a afirmar que tras la medición de la magnitud  $L$  del sistema, cuyo estado inicial (previo a la medición) era  $\Psi$ , obtendremos el resultado  $\lambda_k$  con probabilidad

$$\text{Prob}(\Phi \mapsto \Psi_k) = \|\mathcal{P}_k \Psi\|^2$$

siendo el estado final del sistema el definido por el vector  $\mathcal{P}_k \Psi$ .

Esto es cierto aunque resultado de la medición sea más de un valor  $\lambda_k$  como ocurre en ciertos experimentos.

Supongamos que el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad \hat{T} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_k^2}{2m},$$

donde  $\hat{V} = V(x_1, x_2, x_3) = V(x_1, x_2, x_3)\mathcal{J}$ , sólo depende de las coordenadas.

Supongamos que el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad \hat{T} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_k^2}{2m},$$

donde  $\hat{V} = V(x_1, x_2, x_3) = V(x_1, x_2, x_3)\mathcal{I}$ , sólo depende de las coordenadas.

Por simplicidad trabajaremos sólo con la proyección en el eje  $OX$ .

Como  $[\mathcal{P}, \hat{T}] = 0$  y  $[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x} \implies$

$$[\mathcal{P}, \mathcal{H}] = [\mathcal{P}, V(x)] = -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

Supongamos ahora que los vectores de estado no dependen del tiempo (los operadores sí que pueden, en principio, depender del tiempo). Entonces del postulado V

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | \mathcal{P}_i | \Psi \rangle = - \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right| \Psi \right\rangle \implies \frac{d\mathcal{P}}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},$$

de donde se sigue que

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{P}, \mathcal{H}].$$

Supongamos ahora que los vectores de estado no dependen del tiempo (los operadores sí que pueden, en principio, depender del tiempo). Entonces del postulado V

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | \mathcal{P}_i | \Psi \rangle = - \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right| \Psi \right\rangle \implies \frac{d\mathcal{P}}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},$$

de donde se sigue que

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{P}, \mathcal{H}].$$

De forma análoga, pero usando que  $[x, F(\mathcal{P})] = i\hbar \frac{\partial F(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}$ , se deduce la segunda ecuación de Heisenberg

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar} [x, \mathcal{H}].$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como *ecuaciones dinámicas* de la mecánica cuántica en la *representación de Heisenberg*: es decir, cuando las funciones de onda son vectores independientes del tiempo pero los operadores no lo son.

Las ecuaciones anteriores se conocen como *ecuaciones dinámicas* de la mecánica cuántica en la *representación de Heisenberg*: es decir, cuando las funciones de onda son vectores independientes del tiempo pero los operadores no lo son.

Obviamente hay otra posibilidad y es que los operadores no dependan del tiempo y las funciones de onda sí. En este caso usando el postulado V y que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{P}, \mathcal{H}] \implies$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | \mathcal{P} | \Psi \rangle = - \left\langle \Phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right| \Psi \right\rangle = - \frac{i}{\hbar} \langle \Phi | [\mathcal{P}, \mathcal{H}] | \Psi \rangle.$$



Luego, por un lado,

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle|_{\mathcal{P}} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Phi \middle|_{\mathcal{P}} \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle|_{\mathcal{P}} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

Luego, por un lado,

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle| \mathcal{P} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Phi \middle| \mathcal{P} \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle| \mathcal{P} \Psi \right\rangle + \left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

y, por otro,  $\frac{i}{\hbar} \langle \Phi | [\mathcal{P}, \mathcal{H}] | \Psi \rangle =$

$$= \frac{i}{\hbar} (\langle \Phi | \mathcal{P} \mathcal{H} | \Psi \rangle - \langle \Phi | \mathcal{H} \mathcal{P} | \Psi \rangle) = \left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi \right\rangle + \left\langle \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Phi \middle| \mathcal{P} \Psi \right\rangle,$$

Luego, por un lado,

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle| \mathcal{P} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Phi \middle| \mathcal{P} \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \middle| \mathcal{P} \Psi \right\rangle + \left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

y, por otro,  $\frac{i}{\hbar} \langle \Phi | [\mathcal{P}, \mathcal{H}] | \Psi \rangle =$

$$= \frac{i}{\hbar} (\langle \Phi | \mathcal{P} \mathcal{H} | \Psi \rangle - \langle \Phi | \mathcal{H} \mathcal{P} | \Psi \rangle) = \left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi \right\rangle + \left\langle \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Phi \middle| \mathcal{P} \Psi \right\rangle,$$

de donde se sigue que

$$\left\langle \mathcal{P} \Phi \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Phi \middle| \mathcal{P} \Psi \right\rangle = 0,$$

cualquiera sean los vectores  $\Phi$  y  $\Psi$ .

Por tanto, necesariamente tenemos

la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi.$$

La ecuación anterior es la ecuación de evolución de la mecánica cuántica cuando los operadores no dependen del tiempo.

Por tanto, necesariamente tenemos

la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi.$$

La ecuación anterior es la ecuación de evolución de la mecánica cuántica cuando los operadores no dependen del tiempo.

Las ecuaciones dinámicas del postulado V han de cumplirse independientemente de que escojamos la representación de Schrödinger (S) o la de Heisenberg (H). Además, los observables que medimos deben tener los mismos valores medios en ambas representaciones. Eso implica que ha de existir una transformación unitaria que pase de S a H y viceversa.

## 4 Las ecuaciones de Heisenberg y de Schrödinger

Probamos que ambas representaciones son equivalentes.

Para ello sean  $\psi$  y  $\ell$  la función de estado y el observable en la representación de Heisenberg y sean  $\Psi$  y  $\mathcal{L}$  en la de Schrödinger. Entonces entre ambas existe la relación:

$$\Psi = \mathcal{U}^* \psi, \quad \mathcal{L} = \mathcal{U}^* \ell \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = e^{i\mathcal{H}t/\hbar}.$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador hamiltoniano del sistema que se asume independiente del tiempo.

Si  $\psi$  no depende del tiempo, entonces

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial t} \psi = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} \psi = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi,$$

i.e., la ecuación de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi$ .

## 4 Las ecuaciones de Heisenberg y de Schrödinger

Recordemos que  $\psi$  y  $\ell$  son la función de estado y el observable en la representación de Heisenberg y  $\Psi$  y  $\mathcal{L}$  en la de Schrödinger.

$$\Psi = \mathcal{U}^* \psi, \quad \ell = \mathcal{U} \mathcal{L} \mathcal{U}^*, \quad \mathcal{U} = e^{i\mathcal{H}t/\hbar}, \quad \mathcal{U}^* = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$$

Supongamos que  $\mathcal{L}$  (representación de Schrödinger) no depende de  $t$ . Entonces,

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \mathcal{L} \mathcal{U}^* + \underbrace{\mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathcal{U}^*}_{=0} + \mathcal{U} \mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} \ell - \ell \mathcal{H}) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \ell].$$

Si escogemos  $\ell$  como el operador  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{X}$  recuperamos las ecuaciones de Heisenberg para el momento y la posición, respectivamente.

**La mecánica matricial:** Supongamos que tenemos una base  $(\Psi_n)_n$  completa de vectores de  $\mathbb{H}$ . Entonces, todo vector  $\Psi$  de  $\mathbb{H}$  lo podemos escribir, como ya hemos visto, de la forma

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n, \quad c_n = \langle \Psi_n | \Psi \rangle.$$

Es decir, a cada vector de  $\mathbb{H}$  le podemos hacer corresponder su vector  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)^T$ . Análogamente, a cada operador  $\mathcal{L}$  le podemos hacer corresponder una matriz  $\mathbf{L}$  con entradas  $L_{m,n} = \langle \Psi_m | \mathcal{L} | \Psi_n \rangle$ . Luego la ecuación  $\frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \ell]$  se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{L}].$$

donde  $\mathbf{H}$  es la matriz correspondiente al hamiltoniano del sistema, i.e., recuperamos la también antes mencionada *mecánica matricial de Heisenberg*.



**La ecuación de Schrödinger y el postulado V:** Supongamos que el observable  $L$  es independiente del tiempo y que  $\Psi$  es solución de la ecuación de Schrödinger, siendo  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3) = \hat{T} + \hat{V}.$$

Entonces, la ecuación

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle = \left\langle \Psi \left| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{L}, \mathcal{H}] \right| \Psi \right\rangle$$

nos da

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}, \mathcal{L}] \rangle.$$

Sea  $\mathcal{L} = x_k$ . Usando  $[x, F(\mathcal{P})] = i\hbar \frac{\partial F(\mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}$  tenemos

$$[\mathcal{H}, x_k] = [\hat{T}, x_k] = -i\hbar \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_k}.$$

Sustituyendo lo anterior en

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}, \mathcal{L}] \rangle,$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle x_k \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_k} \right\rangle.$$

Sea  $\mathcal{L} = \mathcal{P}_k$ . Entonces, usando que  $[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x}$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{P}_k] = [\widehat{V}, x_k] = i\hbar \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k},$$

de donde, usando otra vez  $\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}, \mathcal{L}] \rangle \implies$

$$\frac{d}{dt} \langle p_k \rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Es decir, si la función de estado evoluciona según la ecuación de Schrödinger entonces las medias de las coordenadas e impulsos se comportan como en la mecánica hamiltoniana clásica.

Sea  $\mathcal{L} = \mathcal{P}_k$ . Entonces, usando que  $[\mathcal{P}, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x}$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{P}_k] = [\widehat{V}, x_k] = i\hbar \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k},$$

de donde, usando otra vez  $\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}, \mathcal{L}] \rangle \implies$

$$\frac{d}{dt} \langle p_k \rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Es decir, si la función de estado evoluciona según la ecuación de Schrödinger entonces las medias de las coordenadas e impulsos se comportan como en la mecánica hamiltoniana clásica.

**¡El postulado V es equivalente a la ecuación de Schrödinger!**

De lo anterior se sigue que en la representación de Heisenberg una cantidad física es independiente del tiempo si el operador asociado a dicha magnitud conmuta con el Hamiltoniano. Esta propiedad es además muy significativa desde el punto de vista físico como veremos a continuación.

De lo anterior se sigue que en la representación de Heisenberg una cantidad física es independiente del tiempo si el operador asociado a dicha magnitud conmuta con el Hamiltoniano. Esta propiedad es además muy significativa desde el punto de vista físico como veremos a continuación.

### Definición

*Se dice que una cantidad observable  $\ell$  es una integral de movimiento si*

$$\frac{d}{dt}\langle a \rangle = \frac{d}{dt}\langle \Psi | \mathcal{A} | \Psi \rangle = 0.$$

Es decir, una magnitud es una integral de movimiento si dicha magnitud se conserva en media.

Sea un observable  $\mathcal{A}$  y un estado definido por  $|\Psi\rangle$ .

Calculamos la derivada del elemento matricial

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\mathcal{A}\middle|\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\middle|\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\mathcal{A}\middle|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle.$$

Sea un observable  $\mathcal{A}$  y un estado definido por  $|\Psi\rangle$ .

Calculamos la derivada del elemento matricial

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left|\mathcal{A}\right|\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\left|\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\right|\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\left|\mathcal{A}\right|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle.$$

Supongamos ahora que estamos en la representación de Schrödinger, i.e.,

$\mathcal{A}$  no depende de  $t$  y  $|\Psi\rangle$  satisface la Ec. Sch.  $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi$

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = \left\langle\Psi\left|\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \mathcal{A}]\right|\Psi\right\rangle.$$

Entonces,  $\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = 0 \iff [\mathcal{A}, \mathcal{H}] = 0$ .



Si ahora escogemos la representación de Heisenberg entonces ( $|\Psi\rangle$  no depende del tiempo, pero  $\mathcal{A}$  si puede)

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = \left\langle\Psi\left|\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\right|\Psi\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi|[\mathcal{H},\mathcal{A}]|\Psi\rangle,$$

donde hemos usado la Ec.de Heisenberg

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H},\mathcal{A}].$$

Si ahora escogemos la representación de Heisenberg entonces ( $|\Psi\rangle$  no depende del tiempo, pero  $\mathcal{A}$  si puede)

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = \left\langle\Psi\left|\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\right|\Psi\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi|[\mathcal{H},\mathcal{A}]|\Psi\rangle,$$

donde hemos usado la Ec.de Heisenberg

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H},\mathcal{A}].$$

Es decir, también en la representación de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\mathcal{A}|\Psi\rangle = 0 \iff [\mathcal{A},\mathcal{H}] = 0.$$

Probemos que tenemos  $d/dt(\|\Psi\|^2) = 0$ , lo que implica que la probabilidad total no cambia en el tiempo.

Probemos que tenemos  $d/dt(\|\Psi\|^2) = 0$ , lo que implica que la probabilidad total no cambia en el tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\Psi\|^2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Psi \right\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} (\langle \mathcal{H} \Psi | \Psi \rangle - \langle \Psi | \mathcal{H} \Psi \rangle) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi$ .

## 7 Una transformación unitaria muy especial

Sea el operador unitario  $\mathcal{U}(t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$ ,  $H$  es el Hamiltoniano del sistema.

Como los sistemas son invariantes frente a las transformaciones unitarias ello implica que si definimos el estado

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Psi(0)$$

ambos han de describir el mismo estado.

## 7 Una transformación unitaria muy especial

Sea el operador unitario  $\mathcal{U}(t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$ ,  $H$  es el Hamiltoniano del sistema.

Como los sistemas son invariantes frente a las transformaciones unitarias ello implica que si definimos el estado

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Psi(0)$$

ambos han de describir el mismo estado. De lo anterior se deduce que para todo  $t_0$ ,

$$\Psi(t + t_0) = \mathcal{U}(t)\Psi(t_0),$$

es decir, que los estados físicos son invariantes frente a las traslaciones temporales y que  $\|\Psi(t + t_0)\|^2 = \|\Psi(t_0)\|^2$ , i.e., el **test de consistencia** de antes.

## 7 Una transformación unitaria muy especial

Sea el operador unitario  $\mathcal{U}(t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$ ,  $H$  es el Hamiltoniano del sistema.

Como los sistemas son invariantes frente a las transformaciones unitarias ello implica que si definimos el estado

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Psi(0)$$

ambos han de describir el mismo estado. De lo anterior se deduce que para todo  $t_0$ ,

$$\Psi(t + t_0) = \mathcal{U}(t)\Psi(t_0),$$

es decir, que los estados físicos son invariantes frente a las traslaciones temporales y que  $\|\Psi(t + t_0)\|^2 = \|\Psi(t_0)\|^2$ , i.e., el **test de consistencia** de antes.

Nótese que tomado derivadas respecto a  $t$  en  $\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Psi(0)$  obtenemos la **ecuación de Schrödinger**.

Sean dos operadores hermíticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Definamos los operadores

$$\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A} - \langle A \rangle \mathcal{J}, \quad \Delta\mathcal{B} = \mathcal{B} - \langle B \rangle \mathcal{J},$$

donde  $\langle A \rangle$  y  $\langle B \rangle$  son los valores medios de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en el estado  $\Psi$ .

Entonces, como  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{L}$ , con  $\mathcal{L}$  hermítico  $\Rightarrow [\Delta\mathcal{A}, \Delta\mathcal{B}] = i\mathcal{L}$ .



Sean las dispersiones de las cantidades  $A$  y  $B$  en el estado  $\Psi$

$$\Delta A := \sqrt{\langle \Psi | (\Delta \mathcal{A})^2 | \Psi \rangle} = \|\Delta \mathcal{A} \Psi\|,$$

$$\Delta B := \sqrt{\langle \Psi | (\Delta \mathcal{B})^2 | \Psi \rangle} = \|\Delta \mathcal{B} \Psi\|.$$

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz ( $\|f\| \cdot \|g\| \geq |\langle f, g \rangle|$ )

$$\|\Delta \mathcal{A} \Psi\| \|\Delta \mathcal{B} \Psi\| \geq |\langle \Delta \mathcal{A} \Psi | \Delta \mathcal{B} \Psi \rangle| \geq |\Im \langle \Delta \mathcal{A} \Psi | \Delta \mathcal{B} \Psi \rangle|$$

Calculemos la parte imaginaria de

$$\langle \Delta \mathcal{A} \Psi | \Delta \mathcal{B} \Psi \rangle = \langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle$$

–recordemos que  $A$  es hermítico, luego  $\Delta \mathcal{A}$  también lo es pues  $\langle A \rangle$  es real–.  
Obtenemos

$$\begin{aligned} \Im \langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle &= \frac{1}{2i} \left( \langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle - \overline{\langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle - \langle \Psi | \Delta \mathcal{B}^* \Delta \mathcal{A}^* | \Psi \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \langle \Psi | \Delta \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} | \Psi \rangle - \langle \Psi | \Delta \mathcal{B} \Delta \mathcal{A} | \Psi \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2i} \langle \Psi | [\Delta \mathcal{A}, \Delta \mathcal{B}] | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}$  es hermítico,  $\langle \Psi | \mathcal{L} | \Psi \rangle = I \in \mathbb{R}$ . Así

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|I|}{2}.$$

Lo anterior aplicado a los operadores  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{X}$  (ver postulado V) nos conduce al principio de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

- 1 J-L. Basdevant, J. Dalibard, *Quantum mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- 2 R. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. III. *Quantum mechanics*, New Millennium Edition California Institute of Technology, Basic Books, New York, 2010 (de libre acceso en <http://www.feynmanlectures.caltech.edu>)
- 3 A. Messiah, *Mecánica Cuántica*. Vol. I y II. Ed. Tecnos. (Hay una edición inglesa reciente *Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1999)

Para profundizar en las matemáticas:

- 4 B.C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics, volume 267, Springer, NY, 2013.
- 5 E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library Edition, 1989.
- 6 E. Prugovecki, *Quantum Mechanics in Hilbert space*. Academic Press, New York, 1971.