Ampliación de Análisis Matemático

Aproximaciones numéricas: El método de Euler

Diplomatura en Estadística

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla
http://euler.us.es/~renato

Curso 2009/2010

Supongamos que queremos resolver el problema de valores inciales

$$\frac{d\,y(x)}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

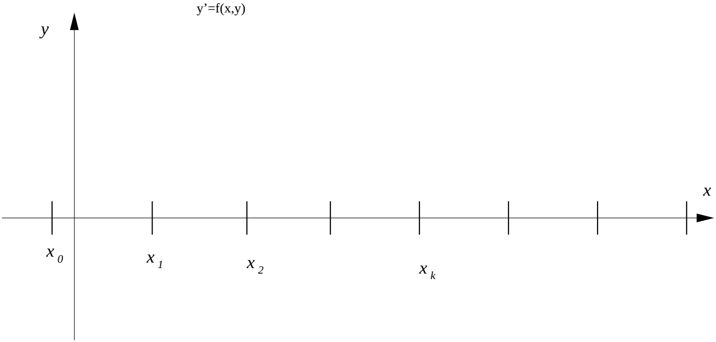
Obviamente usando un ordenador sólo podremos resolver el problema en un intervalo acotado, digamos $[x_0, x_0 + l]$.

Para ello vamos a dividir el intervalo en N subintervalos

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N], \qquad x_N = x_0 + l.$$

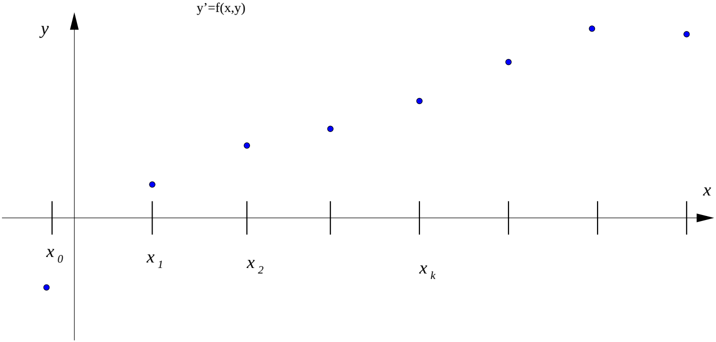
Para ello vamos a dividir el intervalo en N subintervalos

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N], \qquad x_N = x_0 + l.$$



Para ello vamos a dividir el intervalo en N subintervalos

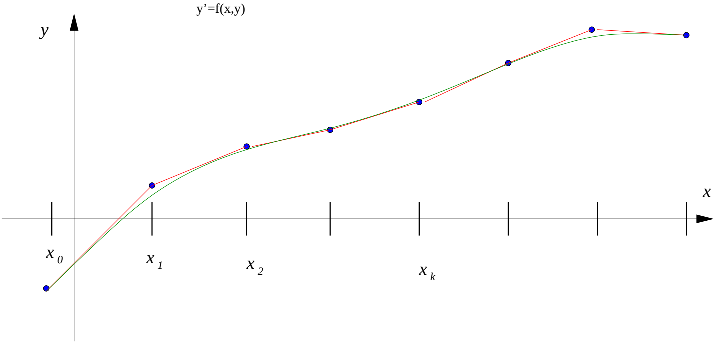
$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N], \qquad x_N = x_0 + l.$$



Supongamos que hemos encontrado los valores de y en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_N$, que denotaremos por $y_0, y_1, \dots, y_N$.

Para ello vamos a dividir el intervalo en N subintervalos

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N], \qquad x_N = x_0 + l.$$



Para encontrar una solución aproximada $\widehat{y}(x)$ podemos unir los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_N, y_N)$, mediante líneas rectas o "interpolando"

Es evidente que si el valor y_i es bastante cercano al valor real $y(x_i)$ para todos los $i = 0, 1, \ldots, N$, entonces, al ser $\widehat{y}$ e y funciones continuas, la solución aproximada $\widehat{y}(x)$ está muy cercana a la solución real $y(x)$ en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$.

Vamos a usar por simplicidad intervalos iguales, es decir, vamos a escoger los *nodos* x_i equidistantes. Lo anterior se conoce en la teoría de métodos numéricos como una red equiespaciada o uniforme de paso $h = l/N$.

Así pues tendremos las siguientes ecuaciones

$$x_k = x_0 + kh = x_0 + k\left(\frac{l}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N, \qquad x_{k+1} = x_k + h.$$

Obviamente la única información que tenemos para calcular los valores y_i es la EDO que satisface nuestra incógnita $y(x)$. ¿Cómo encontrar entonces los valores y_i?

La idea es como sigue:

1. Usando la EDO y la condición inicial calculamos el valor de y_1 en el punto $x_1 = x_0 + h$
2. A continuación usando el valor y_1 calculamos el valor aproximado y_2 de $y(x)$ en x_2, y así sucesivamente.
3. Conocido el valor y_k encontramos el valor y_{k+1} de $y(x)$ en x_{k+1}.

Para encontrar en valor de $y(x_{k+1})$ conocido el valor de $y(x_k)$ usamos el teorema de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \cdots . \qquad (2)$$

Para encontrar en valor de $y(x_{k+1})$ conocido el valor de $y(x_k)$ usamos el teorema de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \cdots . \tag{2}$$

Pero $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, además,

$$y''(x_k) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,y}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_k} = \frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right)\Bigg|_{x=x_k}$$

Para encontrar en valor de $y(x_{k+1})$ conocido el valor de $y(x_k)$ usamos el teorema de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \cdots . \qquad (2)$$

Pero $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, además,

$$y''(x_k) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,y}{dx}\right)\bigg|_{x=x_k} = \frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right)\bigg|_{x=x_k}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{(x,y)=(x_k,y(x_k))} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\bigg|_{(x,y)=(x_k,y(x_k))}.$$

Luego, (2) nos da $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) +$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y(x_k)) + f(x_k, y(x_k)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y(x_k)) \right] \frac{h^2}{2!} + \cdots .$$

La aproximación más sencilla consiste en quedarnos con sólo con el término de primer orden en h:

donde obviamente $y_0 = y(x_0)$.

Luego, (2) nos da $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) +$

$$+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y(x_k)) + f(x_k, y(x_k))\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y(x_k))\right]\frac{h^2}{2!} + \cdots .$$

La aproximación más sencilla consiste en quedarnos con sólo con el término de primer orden en h:

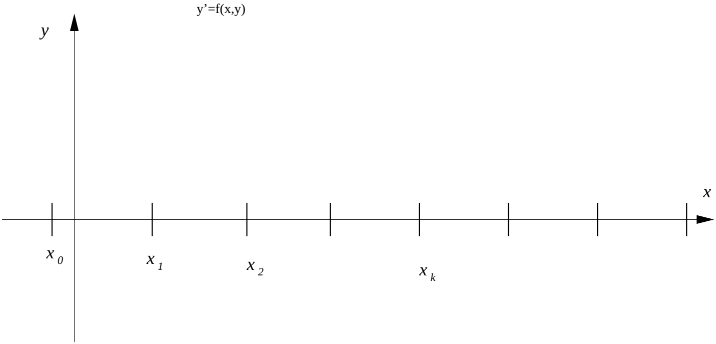
$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \\ \qquad\vdots \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \end{array}\right. \tag{3}$$

donde obviamente $y_0 = y(x_0)$.

El método de Euler: Algoritmo

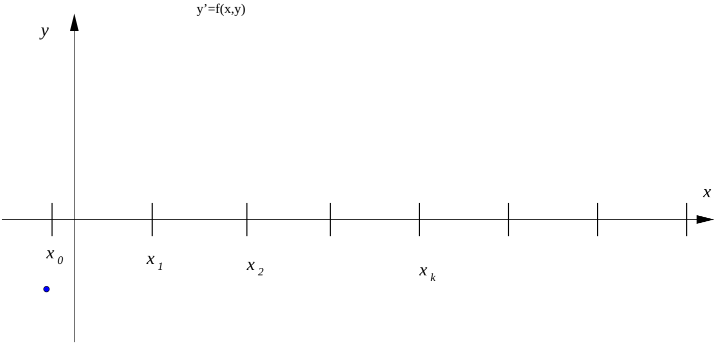
$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

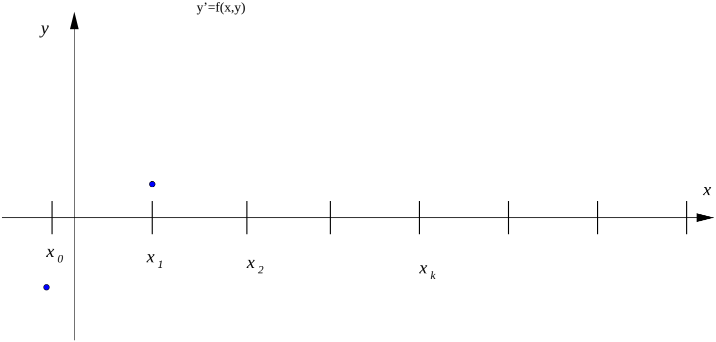


El método de Euler: Algoritmo

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

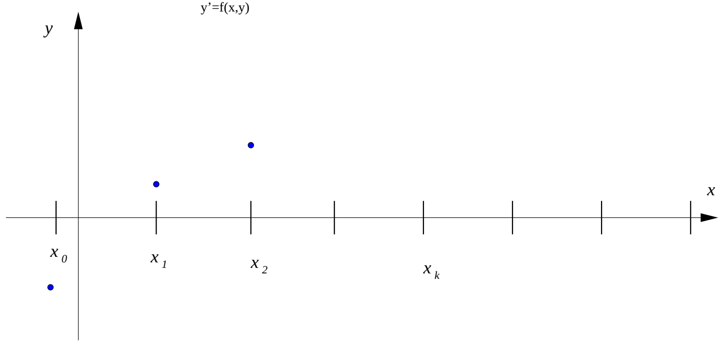


$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



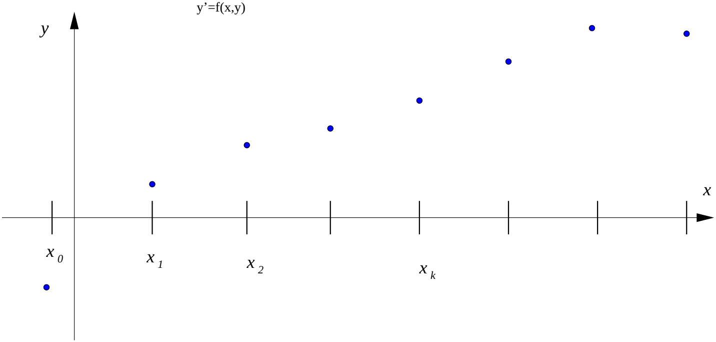
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



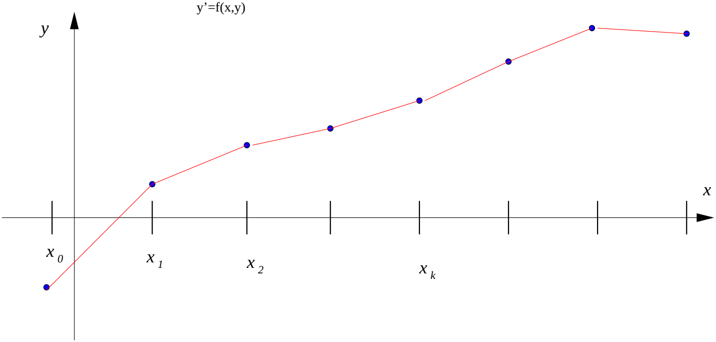
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



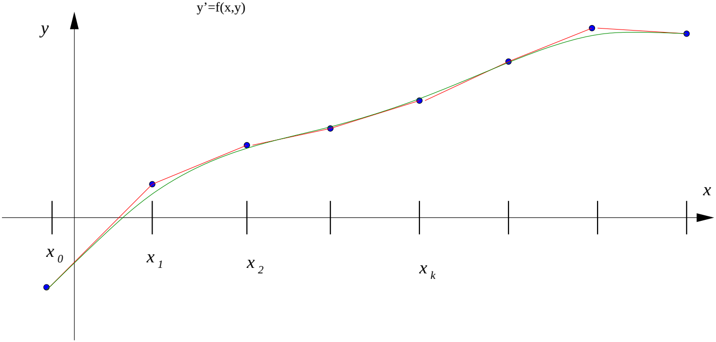
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



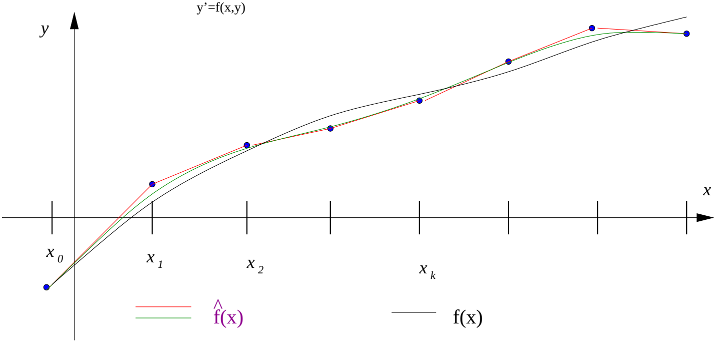
$$y(x) \approx \widehat{y}(x)$$

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



$$y(x) \approx \widehat{y}(x)$$

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



$$y(x) \approx \widehat{y}(x)$$

El esquema anterior se conoce por el nombre de esquema o método de Euler y constituye el método más sencillo para resolver númericamente una EDO de primer orden.

Nótese que dicho esquema necesita en cada paso del valor $y(x_k)$, por tanto cuanto más cercano sea el valor y_k calculado del $y(x_k)$ real más preciso será el método.

El esquema anterior se conoce por el nombre de esquema o método de Euler y constituye el método más sencillo para resolver númericamente una EDO de primer orden.

Nótese que dicho esquema necesita en cada paso del valor $y(x_k)$, por tanto cuanto más cercano sea el valor y_k calculado del $y(x_k)$ real más preciso será el método.

Obviamente en cada paso "arrastramos" el error del cáculo del paso anterior.

El esquema anterior se conoce por el nombre de esquema o método de Euler y constituye el método más sencillo para resolver númericamente una EDO de primer orden.

Nótese que dicho esquema necesita en cada paso del valor $y(x_k)$, por tanto cuanto más cercano sea el valor y_k calculado del $y(x_k)$ real más preciso será el método.

Así, para calcular y_1 usamos el valor real y_0 pero cuando calculamos y_2, sustituimos el valor exacto $y(x_1)$ desconocido por su valor aproximado y_1, para calcular y_3 sustituimos el valor $y(x_2)$ por su valor aproximado y_2, y así sucesivamente.

Veamos algunos ejemplos.

Comenzaremos con una ecuación que sepamos resolver exactamente. Por ejemplo, estudiemos el problema de valores iniciales

$$y' + y = x, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

cuya solución exacta es $y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$.

Escogeremos una discretización equidistante con paso $h = 1/20$ (20 subintervalos iguales). Para resolverlo númericamente usaremos el programa *Maxima*

Sea la ecuación

$$y' + \mathrm{sen}(y) = x, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Sea la ecuación

$$y' + \operatorname{sen}(y) = x, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Otro ejemplo es el siguiente:

$$y' + \operatorname{sen}(3y + x) = 0, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Sea el problema de valores iniciales

$$y' - \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x \geq 0.$$

Si usamos el esquema de Euler observamos que obtenemos la solución trivial $y = 0$. No obstante la ecuación anterior tiene una solución no trivial $y = x^{3/2}$. ¿Qué ocurre en este caso?

Sea el problema de valores iniciales

$$y' - \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x \geq 0.$$

Si usamos el esquema de Euler observamos que obtenemos la solución trivial $y = 0$. No obstante la ecuación anterior tiene una solución no trivial $y = x^{3/2}$. ¿Qué ocurre en este caso? ¡$f(x, y) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ no es buena!

Sea el problema de valores iniciales

$$y' - \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x \geq 0.$$

Si usamos el esquema de Euler observamos que obtenemos la solución trivial $y = 0$. No obstante la ecuación anterior tiene una solución no trivial $y = x^{3/2}$. ¿Qué ocurre en este caso? ¡$f(x, y) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ no es buena!

Consideremos ahora el problema

$$y' - 1 - y^2 = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x \geq 0.$$

Una solución "trivial" es $y(x) = \tan x$. Veamos que ocurre númericamente.

Una posibilidad es truncar la serie de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \cdots .$$

en el tercer orden, de forma que tengamos $y_0 = y(x_0)$,

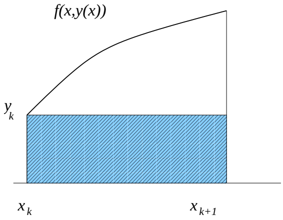
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + f(x_k, y_k)\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)\right]\frac{h^2}{2}.$$

La ecuación anterior se conoce como el método de la serie de Taylor de tres términos y aunque es más preciso que el de Euler, es algo incómodo de aplicar sobre todo si f es una función algo "complicada". Por ello se suele usar una modificación del mismo.

Para ello escribimos la EDO $y' = f(x,y)$ en $x_k, x_k + h$ en su forma integral

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx. \tag{4}$$

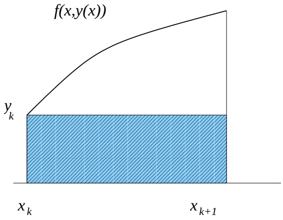
Para resolver este problema aproximamos la integral mediante un rectángulo de altura $f(x_k, y_k)$



Para ello escribimos la EDO $y' = f(x,y)$ en $x_k, x_k + h$ en su forma integral

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx. \tag{4}$$

Para resolver este problema aproximamos la integral mediante un rectángulo de altura $f(x_k, y_k)$



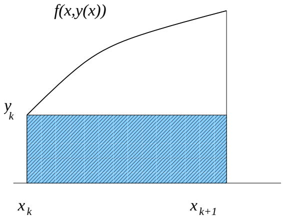
$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx \approx hf(x_k, y_k)$$

$$\Downarrow$$

Para ello escribimos la EDO $y' = f(x, y)$ en $x_k, x_k + h$ en su forma integral

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx. \quad (4)$$

Para resolver este problema aproximamos la integral mediante un rectángulo de altura $f(x_k, y_k)$

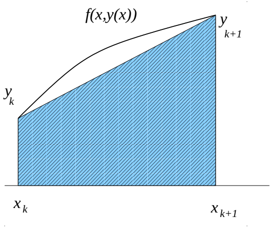


$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx \approx hf(x_k, y_k)$$

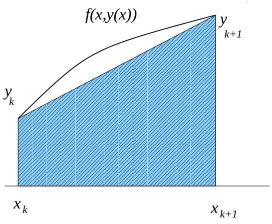
$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

Esta aproximación es muy burda. Una mejor aproximación es usar la regla de los trapecios para aproximar la integral



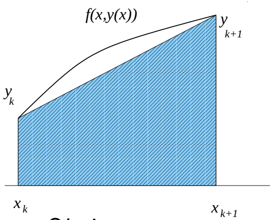
Esta aproximación es muy burda. Una mejor aproximación es usar la regla de los trapecios para aproximar la integral



$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

$$\Downarrow$$

Esta aproximación es muy burda. Una mejor aproximación es usar la regla de los trapecios para aproximar la integral



$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x,y(x))dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})\right]$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{h}{2}\left[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})\right],$$

Obviamente este esquema es muy incómodo pues hay que resolver la ecuación implícita para hallar y_{k+1}.

$$\color{red}{y_{k+1}} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\color{red}{y_{k+1}})\right]$$

Si usamos la fórmula anterior $y_0 = y(x_0)$,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

y usamos la predicción que da el método de Euler para $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ obtenemos el *método de Euler mejorado*: $y_0 = y(x_0)$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

Si usamos la fórmula anterior $y_0 = y(x_0)$,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

y usamos la predicción que da el método de Euler para $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ obtenemos el *método de Euler mejorado*: $y_0 = y(x_0)$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

Ejemplos

Como último ejemplo resolveremos el siguiente problema de valores iniciales

$$v' = g - \kappa v^r, \qquad v(0) = v_0, \tag{5}$$

que modeliza la velocidad de la caída de un cuerpo en un medio "viscoso" (el aire o el agua).

Suponiendo que $g = 9{,}8$, $\kappa = 2$, $v_0 = 0$ resolver el PVI anterior para los valores $r = 1$, $1{,}5$, 2 y 3. Calcula la velocidad máxima de caida.