Ampliación de Análisis Matemático

Modelos para el crecimiento de poblaciones: Modelos predador-presa

Diplomatura en Estadística

http://euler.us.es/~renato

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Curso 2009/2010

El modelo logístico discreto

Este modelo tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0,$$

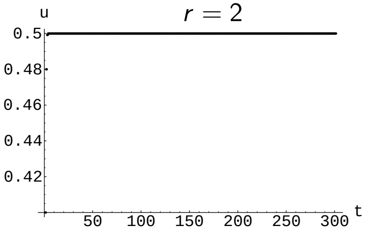
y donde se asume que $u_0 \in (0,1)$.

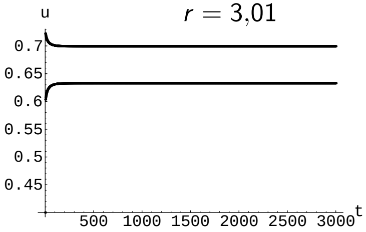
El modelo logístico discreto

Este modelo tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0,$$

y donde se asume que $u_0 \in (0,1)$.



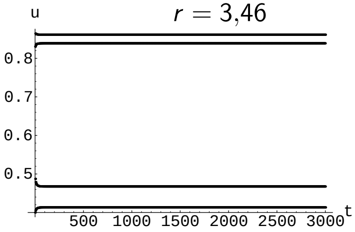


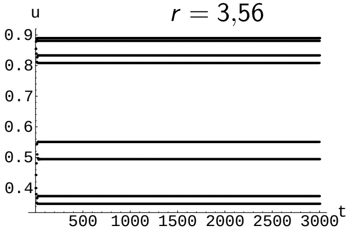
El modelo logístico discreto

Este modelo tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0,$$

y donde se asume que $u_0 \in (0,1)$.



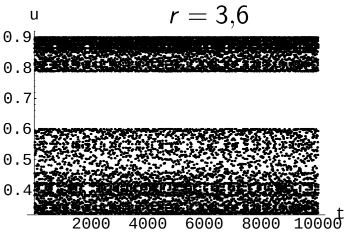


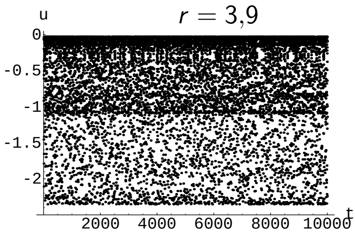
El modelo logístico discreto

Este modelo tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0,$$

y donde se asume que $u_0 \in (0,1)$.



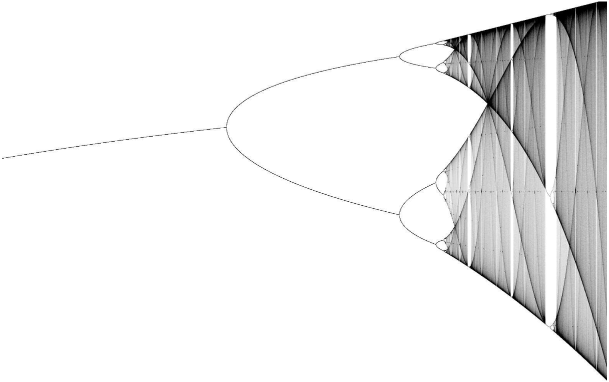


El modelo logístico discreto

Este modelo tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0,$$

y donde se asume que $u_0 \in (0,1)$. bifurcaciones y caos



Otros modelos

Los modelos discretos de poblaciones tienen la forma

$$u_{t+1} = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal.

Otros modelos

Los modelos discretos de poblaciones tienen la forma

$$u_{t+1} = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal. Fenómeno de Jillson.

Otros modelos

Los modelos discretos de poblaciones tienen la forma

$$u_{t+1} = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal. Fenómeno de Jillson.

$$N(t+1) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right), \quad r > 0, \quad , K(t) > 0.$$

con $K(t) = K(1 - a(-1)^t), \quad a \in (0, 1)$

Los modelos discretos de poblaciones tienen la forma

$$u_{t+1} = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal. Fenómeno de Jillson.

$$N(t+1) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right), \quad r > 0, \quad , K(t) > 0.$$

con $K(t) = K(1 - a(-1)^t), \quad a \in (0,1)$

Otra opción es usar la ecuación de Beverton-Holt

$$N(t+1) = \frac{\mu K(t)N(t)}{K(t) + (\mu - 1)N(t)}, \quad K(t) > 0.$$

Otros modelos

Los modelos discretos de poblaciones tienen la forma

$$u_{t+1} = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal. Fenómeno de Jillson.

$$N(t+1) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right), \quad r > 0, \quad , K(t) > 0.$$

con $K(t) = K(1 - a(-1)^t), \quad a \in (0,1)$

Otra opción es usar la ecuación de Beverton-Holt

$$N(t+1) = \frac{\mu K(t)N(t)}{K(t) + (\mu - 1)N(t)}, \quad K(t) > 0.$$

En general $N(t+1) = [F(t,x(t)) + T(t,x(t))]x(t)$

Vamos ahora a considerar el modelo de Lotka-Volterra para el crecimiento de dos poblaciones siendo una la depredadora de la otra.

Vamos ahora a considerar el modelo de Lotka-Volterra para el crecimiento de dos poblaciones siendo una la depredadora de la otra.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.

Modelos de Lotka-Volterra

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.
- Si no hay presas $(c = 0)$ la población del depredador disminuye exponencialmente.

Modelos de Lotka-Volterra

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.
- Si no hay presas $(c = 0)$ la población del depredador disminuye exponencialmente.
- Las presas corrigen esta tendencia con el término $+cPN$.

Hagamos el cambio

$$u = \frac{c}{d}N, \quad v = \frac{b}{a}P, \quad \tau = at, \quad \alpha = \frac{d}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1-v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u-1). \end{aligned}$$

Hagamos el cambio

$$u = \frac{c}{d}N, \quad v = \frac{b}{a}P, \quad \tau = at, \quad \alpha = \frac{d}{a} \quad \Rrightarrow$$

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v),$$
$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1).$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{du}{dv} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)}$$

Hagamos el cambio

$$u = \frac{c}{d}N, \quad v = \frac{b}{a}P, \quad \tau = at, \quad \alpha = \frac{d}{a} \quad \Rightarrow$$

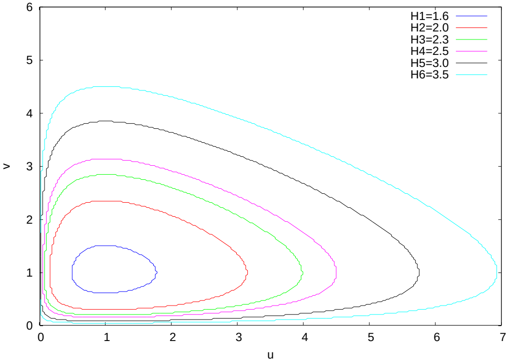
$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v),$$
$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1).$$

De lo anterior se sigue que

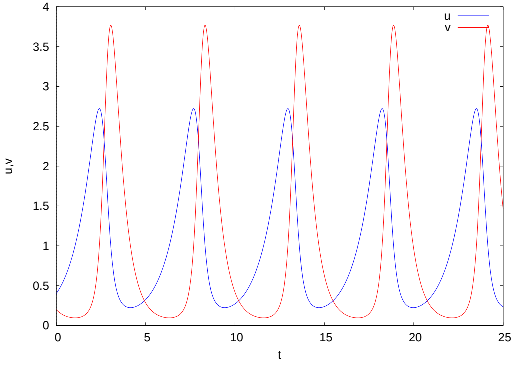
$$\frac{du}{dv} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)}$$

Cuya solución es: $\alpha u + v - \log u^{\alpha} v = const.$

Si $H > 1 + \alpha$ (que es el mínimo de H que se alcanza para $u = v = 1$), entonces las trayectorias definidas por $\alpha u + v - \log u^{\alpha} v = const$. son cerradas lo que implica que u y v son funciones periódicas.



Si $H > 1 + \alpha$ (que es el mínimo de H que se alcanza para $u = v = 1$), entonces las trayectorias definidas por $\alpha u + v - \log u^{\alpha} v = const$. son cerradas lo que implica que u y v son funciones periódicas.



Nótese que de las EDOs

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v),$$
$$\frac{dv}{dt} = \alpha v(u-1).$$

se sigue que $u = v = 0$ y $u = v = 1$ son soluciones estacionarias.

Nótese que de las EDOs

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v),$$
$$\frac{dv}{dt} = \alpha v(u-1).$$

se sigue que $u = v = 0$ y $u = v = 1$ son soluciones estacionarias.

Se puede probar que en el primer caso la solución estacionaria es inestable mientras que en el segundo es estable. Para ello notemos que si escojemos una solución muy cercana a $u = v = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1-v) \approx u,\\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u-1) \approx -\alpha v.\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

La solución es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Escojamos ahora una solución muy cercana a $u = 1$ y $v = 1$, i.e., $u = 1 + x$ y $v = 1 + y$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1-v) & & \frac{dx}{d\tau} = -y(1+x) \\ & & \Rrightarrow & \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u-1) & & \frac{dy}{d\tau} = \alpha x(1+y) \end{aligned}$$

que es aproximadamente igual al sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha} t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha} t) \\ \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Escojamos ahora una solución muy cercana a $u = 1$ y $v = 1$, i.e., $u = 1 + x$ y $v = 1 + y$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u - 1) \end{aligned} \quad \Rrightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -y(1 + x) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \alpha x(1 + y) \end{aligned}$$

que es aproximadamente igual al sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha} t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha} t) \\ \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha} t) \end{pmatrix} \overset{t\to\infty}{\not\to} \infty$$