Ampliación de Análisis Matemático

Diplomatura en Estadística. Curso 2009/2010

http://euler.us.es/~renato/

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Sistemas de EDOs y Álgebra Lineal

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (SEDO) es un sistema de la forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

donde y_1,... y_n son funciones de x desconocidas y f_1, ... f_n son ciertas funciones conocidas.

Por comodidad vamos a usar la forma vectorial del sistema anterior, o sea, vamos a denotar por Y, Y' y F son los vectores

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

$$F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Usando lo anterior podemos reescribir el SEDO en la forma vectorial

$$\frac{d}{dx} Y(x) = Y'(x) = F(x, Y).$$

Evidentemente que el caso $n = 1$ recuperamos las EDOs de primer orden estudiadas con anterioridad.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1 - y_1 \\ y_2' = 2xy_2 + y_1 \end{cases}$$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1 - y_1 \\ y_2' = 2xy_2 + y_1 \end{cases}$$

Es evidente que el ejemplo anterior es un caso "atípicos" de sistemas pues hay una ecuación que sólo depende de una función que nos permite encontrar la solución y luego sustituirla en la segunda.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1 - y_1 \\ y_2' = 2xy_2 + y_1 \end{cases}$$

Es evidente que el ejemplo anterior es un caso "atípicos" de sistemas pues hay una ecuación que sólo depende de una función que nos permite encontrar la solución y luego sustituirla en la segunda.

Nos restringiremos al estudio de los SEDOs lineales, es decir cuando f_k, $k = 1, \ldots, n$ es una función lineal de la forma

$$f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j(x) + b_k(x), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Sistemas de EDOs

$$\left\{\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x). \end{aligned}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x), \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x). \end{array}\right. ,$$

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial

$$\mathbf{Y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1(x)} & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Cuando $B(x) = 0$: caso homogéneo.

Breve repaso de Álgebra lineal

Definición

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual están definidas las operaciones suma "+" *de dos elementos x, y de V y* multiplicación "·" *de un escalar (número real) α por un elemento de V. V es un espacio vectorial si*

1. $\forall x, y \in V$, *el vector suma,* $w = x + y \in V$ *y se cumple que:*
   1. $x + y = y + x$
   2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que* $x + 0 = 0 + x = x$
   4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
2. $\forall x \in V$, *el vector* $w = \alpha \cdot x \in V$ *y se cumple que:*
   1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
   2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
   3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
   4. $1 \cdot x = x$

1. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.
2. El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.
3. El conjunto $\mathbb{P}_n$ de los polinomios de grado a lo sumo n

$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad a_0, ..., a_n \text{ números reales.}\},$$

donde definimos

$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n, \quad q(x) = b_0 + b_1\, t + \cdots + b_n\, t^n,$$

$$(p+q)(t) \equiv p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

$$(\alpha \cdot p)(t) \equiv \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

4. El conjunto $C_{[a,b]}$ de las funciones continuas en $[a, b]$

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Para $V = C_{[a,b]}$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$ entero.
3. Para $V = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Subespacios vectoriales

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y, vectores de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Conjuntos linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

1. *Un conjunto* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*
2. *Un conjunto* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de dos o más vectores de* V *con alguno de los vectores* $v_i = 0$ $(1 \leq i \leq p)$ *es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes (¿por qué?).*
3. *Dos vectores* v_1 *y* v_2 *de* V *son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real* α *tal que* $v_1 = \alpha v_2$ *o* $v_2 = \alpha v_1$

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Importancias de los vectores **li**: Bases

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \operatorname{span}(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2: El conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\} \in \mathbb{P}_n$ es **li**, además $\operatorname{span}(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. Luego S es una base de $\mathbb{P}_n$ (*canónica*).

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Bases y dimensión del espacio

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina *dimensión del espacio vectorial*.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n+1$, $\dim C_{[a,b]} = \infty$.

Definición

Sea A una matriz de $n \times n$. Denominaremos al vector x de $\mathbb{R}^n$, autovector de A asociado al autovalor λ, al vector **no nulo** $x \neq 0$, *tal que*

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0.$$

Definición

Sea A una matriz de $n \times n$. Denominaremos al vector x de $\mathbb{R}^n$, autovector de A asociado al autovalor λ, al vector **no nulo** *$x \neq 0$, tal que*

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0.$$

Es fácil comprobar que si x es un autovector asociado al autovalor λ, entonces el sistema

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad \text{donde } I_n \quad \text{es la matriz identidad } n \times n,$$

tiene soluciones no triviales. Por tanto, dado un autovalor λ de A, el conjunto de los autovectores asociados a λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Dicho espacio se denomina *autoespacio* de A correspondiente al autovalor λ.

Teorema

Sea A una matriz de $n \times n$ que tiene p autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$. Entonces los autovectores $v_1, v_2, ..., v_p$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ son linealmente independientes.

Teorema

Sea A una matriz de $n \times n$ que tiene p autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$. Entonces los autovectores $v_1, v_2, ..., v_p$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ son linealmente independientes.

Corolario

Si una matriz $n \times n$ tiene n autovalores distintos, entonces los correspondientes autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Calculando los autovalores y autovectores

¿Cómo calcular los autovalores?

¿Cómo calcular los autovalores? Los autovalores λ son tales que

$$Ax = \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\, I)x = 0$$

tiene soluciones no triviales.

¿Cómo calcular los autovalores? Los autovalores λ son tales que

$$Ax = \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\, I)x = 0$$

tiene soluciones no triviales.

Pero un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det(A - \lambda\, I) = 0. \qquad (*)$$

La ecuación anterior se denomina *ecuación característica* de A.

Calculando los autovalores y autovectores

¿Cómo calcular los autovalores? Los autovalores λ son tales que

$$Ax = \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0$$

tiene soluciones no triviales.

Pero un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{*}$$

La ecuación anterior se denomina *ecuación característica* de A.

Así pues, un número λ es un autovalor de la matriz A de $n \times n$ si y sólo si λ satisface la ecuación característica de A (*), $\det(A - \lambda I) = 0$.

¿Cómo calcular los autovalores? Los autovalores λ son tales que

$$Ax = \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0$$

tiene soluciones no triviales.

Pero un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0. \qquad (*)$$

La ecuación anterior se denomina *ecuación característica* de A.

Así pues, un número λ es un autovalor de la matriz A de $n \times n$ si y sólo si λ satisface la ecuación característica de A (*), $\det(A - \lambda I) = 0$.

Es fácil ver que $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n en λ. Por lo que el polinomio $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se le denomina *polinomio característico* de A.

Los autovalores de A serán las raíces de dicho polinomio, i.e., λ es un autovalor de A si y sólo si $p_n(\lambda) = 0$.

Definición

Una matriz A *de* $n \times n$ *es* diagonalizable *si existe una matriz* P *invertible y una* D *diagonal, tales que* $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ $(AP = PD)$.

Diagonalizando matrices

Definición

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si existe una matriz P invertible y una D diagonal, tales que $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ $(AP = PD)$.*

Teorema

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si y sólo si A tiene n autovectores* **li**. *Además, en este caso los elementos de la matrix diagonal* **D** *son los autovalores de A y las columnas de* **P** *son los correspondientes autovectores.*

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y los autovectores $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

Definición

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si existe una matriz P invertible y una D diagonal, tales que $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ $(AP = PD)$.*

Teorema

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si y sólo si A tiene n autovectores* **li**. *Además, en este caso los elementos de la matrix diagonal* **D** *son los autovalores de A y las columnas de* **P** *son los correspondientes autovectores.*

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y los autovectores $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Diagonalizando matrices

Definición

Una matriz A *de* $n \times n$ *es* diagonalizable *si existe una matriz* P *invertible y una* D *diagonal, tales que* $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ $(AP = PD)$.

Teorema

Una matriz A *de* $n \times n$ *es* diagonalizable *si y sólo si* A *tiene* n *autovectores* **li**. *Además, en este caso los elementos de la matrix diagonal* **D** *son los autovalores de* A *y las columnas de* **P** *son los correspondientes autovectores.*

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y los autovectores $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Definición

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si existe una matriz P invertible y una D diagonal, tales que* $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ $(AP = PD)$.

Teorema

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable *si y sólo si A tiene n autovectores* **li**. *Además, en este caso los elementos de la matrix diagonal* **D** *son los autovalores de A y las columnas de* **P** *son los correspondientes autovectores.*

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y los autovectores $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} =$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^5.

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^5.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^5.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5 P^{-1} =$$

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$
$$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^5.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 6^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

Potencia de una matriz

Si una matriz A es diagonalizable es sencillo calcular sus potencias:

$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad \Rrightarrow \quad A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$
$P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$

En general $\quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^5.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 6^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2221 & 2222 \\ 5555 & 5554 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora como trabajar con *Maxima* los sistemas de ecuaciones lineales.