Ampliación de Análisis Matemático

Diplomatura en Estadística. Curso 2009/2010

http://euler.us.es/~renato/

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Aplicaciones de las EDOs de 2º orden

Ampliación de Análisis Matemático

Diplomatura en Estadística. Curso 2009/2010

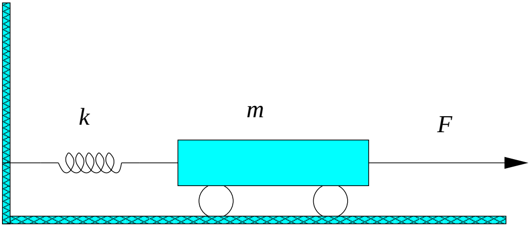
http://euler.us.es/~renato/

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Aplicaciones de las EDOs de 2º orden

Ejemplo

Vibraciones mecánicas



$$mx'' + ax' + kx = F(x) \quad \Longrightarrow \quad x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = f(t)$$

$$\alpha = \frac{a}{2m} > 0, \;\; \omega^2 = \frac{k}{m}, \;\; f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

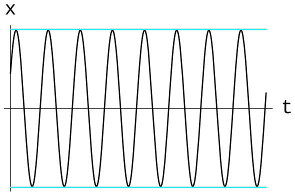
1. Si no hay fuerza externa ni rozamiento, o sea, $f = 0$ y $\alpha = 0$.

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

y la solución general es $x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \Longrightarrow$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \;\; \delta = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

La solución es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$ por lo que el movimiento se denomina *movimiento armónico simple*



El movimiento armónico simple.

2. Supongamos que $F = 0$, $x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \Longrightarrow$

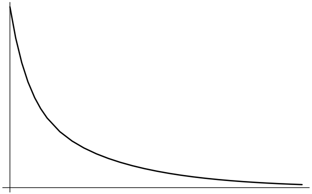
$$x(t) = c_1 e^{-\alpha x + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} x} + c_2 e^{-\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} x} \qquad \beta = \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|}$$

Tenemos que considerar tres casos:

2a. Caso sobreamortiguado: Si $\alpha > \omega$, entonces, llamando $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha$ tenemos la solución

$$x(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t},$$

que decrece exponencialmente a cero.

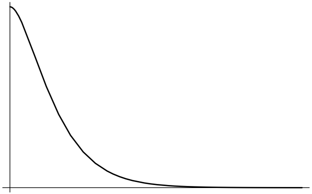


El movimiento sobreamortiguado. CI: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2b. Si $\alpha = \omega$, entonces la solución es

$$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t},$$

que también decrece exponencialmente a cero.

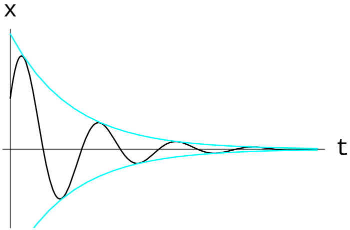


El movimiento sobreamortiguado. CI: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2c. Caso amortiguado: $\alpha < \omega \quad \Longrightarrow$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \mathrm{sen}(\beta t)\right],$$

que decrece oscilando exponencialmente a cero



El movimiento amortiguado. CI: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3. Veamos el caso de una fuerza periódica.

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t).$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

$x_h(t)$ es la solución general de la EDO homogénea.
$x_p(t) = \Re[y(t)]$, con y solución de $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = f_0 e^{i\Omega t}$.
Hacemos el cambio $y_p(t) = v(t)e^{i\Omega t}$ y lo sustituimos en la EDO para y $\implies$

$$v'' + (2i\Omega + 2\alpha)v' + (\omega^2 - \Omega^2 + i2\alpha\Omega)v = f_0 \quad \implies$$

$$v(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2 + i2\alpha\Omega},$$

es una solución particular, por tanto

$$y_p(t) = \frac{f_0 e^{i\Omega t}}{\omega^2 - \Omega^2 + i2\alpha\Omega} \quad \implies$$

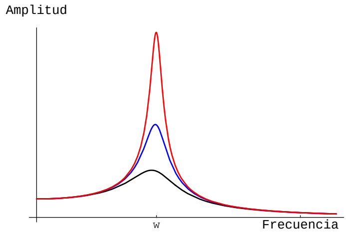
$$x_p(t) = \Re[y_p] = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2\alpha\Omega \mathrm{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} f_0, \qquad \Longrightarrow$$

$$x(t) = x_h(t) + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2\alpha\Omega \mathrm{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} f_0.$$

IMPORTANTE: En todos los casos $x_h(t)$ tiende exponencialmente a cero por lo que si t es suficiente grande $x(t) \approx x_p(t)$.

$$x(t) \approx x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \delta),$$

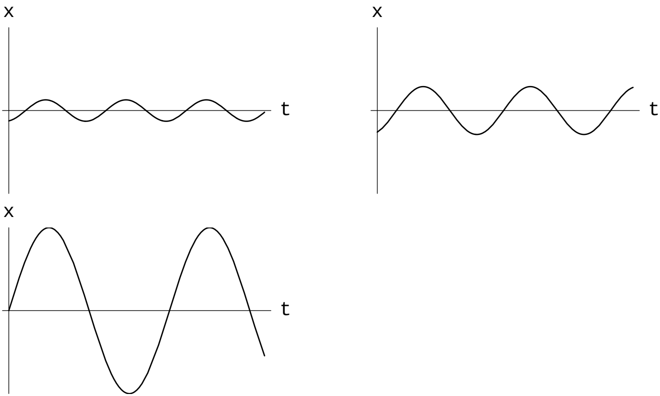
$$\delta = \arctan\left(\frac{2\alpha\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right).$$



Amplitud de las vibraciones forzadas: resonancia.

Como se ve en la fórmula anterior, las oscilaciones tienen una amplitud que depende de la propia frecuencia de oscilación. Obviamente para $\Omega = \omega$ la amplitud es máxima, es decir cuando la frecuencia Ω de la fuerza exterior es igual a ω —como ω sólo depende de las características de sistema, en este caso m y k, se suele denominar frecuencia *propia*—.

En la figura 11 representamos, usando la misma escala, las gráficas de las posiciones del carro para diferentes valores de la frecuencia externa ($\Omega = 2\omega$, $\Omega = 3/2\omega$ y $\Omega = w$).



Vibraciones forzadas.

¿Y si $\alpha = 0$?

Si $\alpha = 0$ (no hay rozamiento) la EDO es

$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t).$$

Si $\Omega \neq \omega$ entonces simplemente tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$ en (9) que nos da,

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t).$$

Si $\Omega = \omega$ entonces la solución anterior no vale.
En este caso tenemos que resolver de nuevo la EDO:
Sustituimos $y_p(t) = v(t) e^{i\omega t}$ en la EDO $\quad \Longrightarrow \quad v'' + 2i\omega v' = f_0$

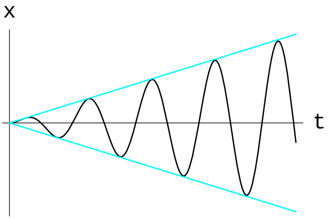
$v_p(t) = f_0 t/(2i\omega) \quad \Longrightarrow \quad x_p(t) = \Re\left[\dfrac{f_0 t}{2i\omega} e^{i\omega t}\right] = \dfrac{f_0 t}{2\omega} \mathrm{sen}(\omega t)$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{2\omega}\, t \mathrm{sen}(\omega t).$$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad \Omega \neq \omega$$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{2\omega}\, t\mathrm{sen}(\omega t) \Omega = \omega.$$

Si $\Omega = \omega$ y $t \to \infty$, la solución es no acotada pues $f_0 t/(2\omega) \to \infty$, es decir tenemos un movimiento oscilatorio con frecuencia fija pero con amplitud que aumenta linealmente con el tiempo.



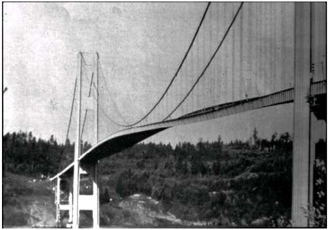
Resonancia en un sistema sin rozamiento.

El fenómeno de la resonancia es conocido desde hace muchos años y es el causante de más de un desastre en sistemas mecánicos. Por ejemplo, el 14 de abril de 1831, un grupo de soldados intentó cruzar marchando en puente de Broughton (cerca de Manchester, Inglaterra).

El puente de Broughton (reconstruido en 1905).

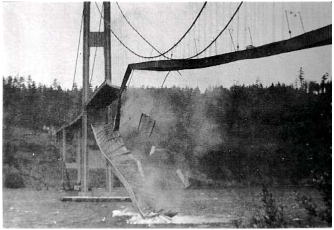
La fuerza periódica que ejercieron al marchar entro en resonancia con la frecuencia propia del puente y este se vino abajo. A partir de ese momento se prohibió a los soldados marchar cuando fuesen a cruzar un puente.

Otro famoso desastre fue el puente de Tacoma en el estado norteamericano de Washington. Este puente se abrió al público el 1 de julio de 1940. Desde ese mismo dia, se observó que el puente comenzaba a oscilar lo que lo convirtió en una *atracción turística local*.



El desastre del puente de Tacoma.

7 de noviembre de 1940 las oscilaciones empezaron a hacerse mayores y sobre las 10:00 am alcanzaban los 7 metros. ¡El puente había entrado en resonancia con el aire! terminó por derrumbarse a las 11:10am.

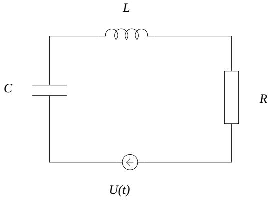


El desastre del puente de Tacoma.

Ejemplo

Vibraciones eléctricas

Consideremos ahora el circuito eléctrico:



Sea $q(t)$ la carga que hay en el capacitor en el momento de tiempo t y $i(t) = q'(t)$ la corriente, o sea, la carga por unidad de tiempo. Entonces, la Ley de Kirchov nos da la siguiente ecuación para la carga $q(t)$:

$$U(t) = Li'(t) + Ri + C^{-1}q(t) \quad \Rightarrow \quad q'' + 2rq' + \omega^2 q(t) = u(t)$$

donde $r = R/(2L)$, $\omega^2 = 1/(LC)$ y $u(t) = U(t)/L$.

Obviamente la EDO anterior es totalmente análoga a la EDO anterior. En particular la solución general de ésta en el caso cuando $u(t) = u_0 \cos(\Omega t)$ es

$$q(t) = q_h(t) + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2r\Omega \operatorname{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4r^2\Omega^2} u_0,$$

donde

$$q_h(t) = \begin{cases} c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}, & r > \omega \\ (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t}, & r = \omega \\ e^{-\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right], & r < \omega \end{cases}$$

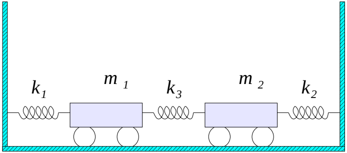
siendo $\beta = \sqrt{|r^2 - \omega^2|}$.

$$\text{Si } \Omega = \omega \quad \Longrightarrow \quad q(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t) + \frac{u_0}{2\omega}\, t\mathrm{sen}(\omega t).$$

Lo anterior nos indica que el análisis de un circuito RLC es análogo al de un oscilador, en particular tendremos el mismo fenómeno de resonancia cuando $\Omega \approx \omega$.

Ejemplo

Los osciladores acoplados



En la figura vemos dos osciladores acoplados. Si no existiera k_3 cada carro oscilaría según la ley que hemos visto antes.
Llamemos x_1 y x_2 a los desplazamietos de la posición de equilibrio de los carros m_1 y m_2 respectivamente, entonces la segunda Ley de Newton nos da

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3 x_2,$$

$$m_2 x_2'' = -k_3(x_2 - x_1) - k_2 x_2 = k_3 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

Para resolver el problema vamos a despejar x_2 en la primera ecuación y sustituirla en la segunda. Eso nos conduce a la siguiente EDO lineal de cuarto orden

$$x_1^{(4)} + \left(\frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right) x_1'' + \left[\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}\right)\left(\frac{k_2+k_3}{m_2}\right) - \frac{k^3}{m_1 m_2}\right] x_1 = 0.$$

Por simplicidad escojamos $m_1 = m_2$ y $k_1 = f_2 = k_3$:

$$x_1^{(4)} + 4\omega^2 x_1'' + 3\omega^4 x_1 = 0, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^4 + 4\omega^2\lambda^2 + 3\omega^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{3}\omega i, \ \pm\omega i,$$

de donde deducimos que la solución tiene la forma

$$x_1(t) = \quad c_1 \cos(\sqrt{3}\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\sqrt{3}\omega t) + c_3 \cos(\omega t) + c_4 \mathrm{sen}(\omega t)$$

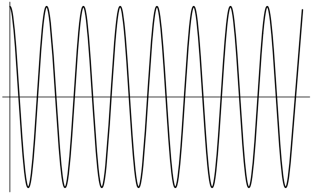
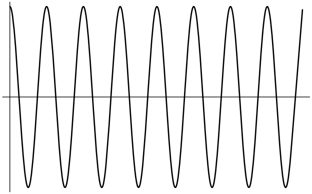
Escojamos $k = m = 1$ de forma que $\omega = 1$. Entonces

$$x_1(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \mathrm{sen}(\sqrt{3}t) + c_3 \cos t + c_4 \mathrm{sen}\, t,$$

$$x_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \mathrm{sen}\, t - c_3 \cos(\sqrt{3}t) + c_4 \mathrm{sen}(\sqrt{3}t).$$

Supongamos que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $x_2'(0) = 0$, entonces obtenemos

$$x_1(t) = \cos t \qquad x_2(t) = \cos t.$$

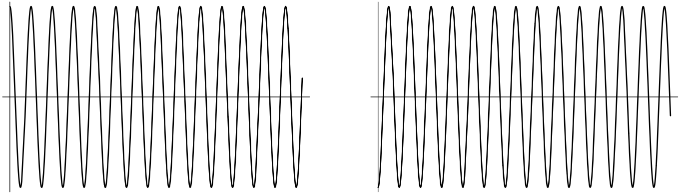



Caso $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $x_2'(0) = 0$.

Si $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 0$, tenemos

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{3}t), \qquad x_2(t) = -\cos(\sqrt{3}t),$$

o sea, tenemos que las oscilaciones son con las frecuencias propias.

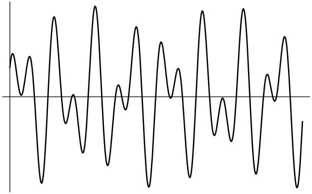
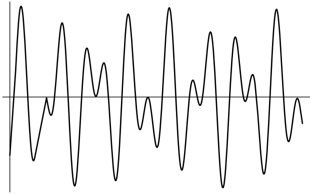


Caso $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 0$.

Pero si escogemos, por ejemplo, $x_1(0) = 1/2$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 1/2$, obtenemos

$$x_1(t) = \frac{-\cos(t)}{4} + \frac{3\cos(\sqrt{3}\,t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{4} + \frac{\sin(\sqrt{3}\,t)}{4\sqrt{3}},$$

$$x_2(t) = \frac{-\cos(t)}{4} - \frac{3\cos(\sqrt{3}\,t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{4} - \frac{\sin(\sqrt{3}\,t)}{4\sqrt{3}}.$$

Caso $x_1(0) = 1/2$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 1/2$.