Ampliación de Análisis Matemático

Modelos para el crecimiento de poblaciones

Diplomatura en Estadística

http://euler.us.es/~renato

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla
Curso 2009/2010

Modelos matemáticos para el crecimiento de poblaciones

Nuestro objetivo será estudiar algunos modelos de crecimiento de poblaciones.

Nuestro objetivo será estudiar algunos modelos de crecimiento de poblaciones.

Quizá el primer modelo *conocido* de crecimiento de poblaciones fue el modelo (problema) que Leonardo de Pisa, mas conocido como Fibonacci, incluyó en su libro *Liber Abaci*, publicado en 1202.

Nuestro objetivo será estudiar algunos modelos de crecimiento de poblaciones.

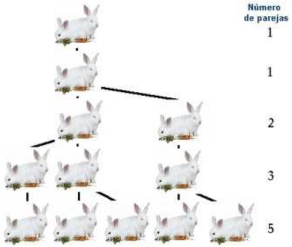
Quizá el primer modelo *conocido* de crecimiento de poblaciones fue el modelo (problema) que Leonardo de Pisa, mas conocido como Fibonacci, incluyó en su libro *Liber Abaci*, publicado en 1202.

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur

Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también.

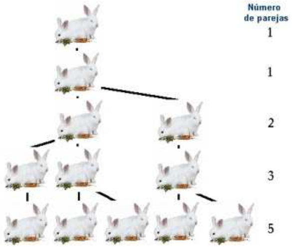
Crecimiento de poblaciones: Fibonacci 1202

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)



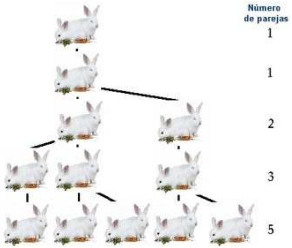
¿Cómo crece una población de conejos?

Crecimiento de poblaciones: Fibonacci 1202



¿Cómo crece una población de conejos?

- Comenzamos con una única pareja de conejos

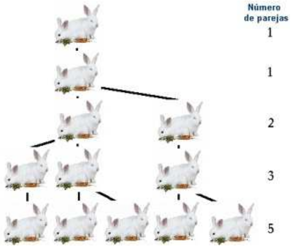


¿Cómo crece una población de conejos?

- Comenzamos con una única pareja de conejos
- Cada pareja de conejos madura pasado cierto tiempo T

Crecimiento de poblaciones: Fibonacci 1202

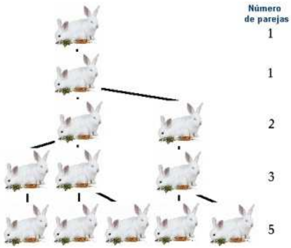
Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)



¿Cómo crece una población de conejos?

- Comenzamos con una única pareja de conejos
- Cada pareja de conejos madura pasado cierto tiempo T
- Cada pareja madura de conejos *produce* una única nueva pareja de conejos cada temporada de crianza

Crecimiento de poblaciones: Fibonacci 1202



¿Cómo crece una población de conejos?

- Comenzamos con una única pareja de conejos
- Cada pareja de conejos madura pasado cierto tiempo T
- Cada pareja madura de conejos *produce* una única nueva pareja de conejos cada temporada de crianza
- Los conejos son *inmortales*.

Sea N_t el número de parejas de conejos al principio de cada temporada y sea t la correspondiente temporada $\Rrightarrow$

Crecimiento de poblaciones: Fibonacci 1202

Sea N_t el número de parejas de conejos al principio de cada temporada y sea t la correspondiente temporada $\Rrightarrow$

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Sea N_t el número de parejas de conejos al principio de cada temporada y sea t la correspondiente temporada $\Rrightarrow$

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots .$$

Si empezamos con $t = 1$ y $N_0 = N_1 = 1$ la fórmula anterior nos genera la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots .$$

Sea N_t el número de parejas de conejos al principio de cada temporada y sea t la correspondiente temporada $\Rrightarrow$

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \dots .$$

Si empezamos con $t = 1$ y $N_0 = N_1 = 1$ la fórmula anterior nos genera la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots .$$

Buscamos la solución en forma $N_t = t^\lambda$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos

$$\boxed{\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})}$$

Así, puesto que es una ecuación lineal de orden dos, su solución general es

$$N_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t,$$

que usando las condiciones iniciales $N_0 = N_1 = 1$ nos da:

Así, puesto que es una ecuación lineal de orden dos, su solución general es

$$N_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t,$$

que usando las condiciones iniciales $N_0 = N_1 = 1$ nos da:

$$\boxed{N_t = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{t+1} - \lambda_2^{t+1})}$$

Así, puesto que es una ecuación lineal de orden dos, su solución general es

$$N_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t,$$

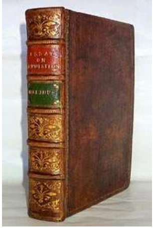
que usando las condiciones iniciales $N_0 = N_1 = 1$ nos da:

$$\boxed{N_t = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{t+1} - \lambda_2^{t+1})}$$

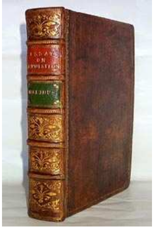
Si $t >> 1 \quad \Rrightarrow \quad N_t \approx \lambda_1^{t+1}/\sqrt{5} \qquad N_{t+1}/N_t \approx (1+\sqrt{5})/2$

Modelos de poblaciones: Thomas R. Malthus (1766–1834)

Modelos de poblaciones: Thomas R. Malthus (1766–1834)

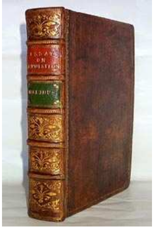


1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.



1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.

Postulados

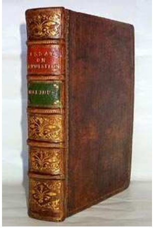
 

1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.

Postulados

- Sea $p(t)$ el número de individuos en el momento t, $p(t) \gg 1$

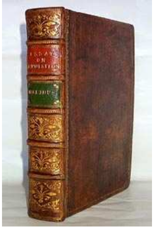
Modelos de poblaciones: Thomas R. Malthus (1766–1834)



1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.

Postulados

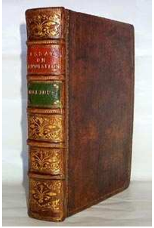
- Sea $p(t)$ el número de individuos en el momento t, $p(t) \gg 1$
- Sea $r(t, p)$ la diferencia entre en índice de natalidad y mortalidad



1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.

Postulados

- Sea $p(t)$ el número de individuos en el momento t, $p(t) \gg 1$
- Sea $r(t, p)$ la diferencia entre en índice de natalidad y mortalidad
- Supongamos que la población esta aislada



1798: Essay on the Principle of Population por T.R. Malthus.

Postulados

- Sea $p(t)$ el número de individuos en el momento t, $p(t) \gg 1$
- Sea $r(t, p)$ la diferencia entre en índice de natalidad y mortalidad
- Supongamos que la población esta aislada
- La variación $p(t+h) - p(t) \sim p(t)h$ y el coef. de proporcionalidad es $r(t, p)$.

$$p(t+h)-p(t)=r(t,p)p(t)h, \quad h\to 0, \quad \Rightarrow \quad p'(t)=r(t,p)p(t).$$

Crecimiento de poblaciones: Malthus

$$p(t+h)-p(t)=r(t,p)p(t)h, \quad h\to 0, \quad \Rightarrow \quad p'(t)=r(t,p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si $r(t,p)=r$, constante. Así, la población puede ser modelizada mediante el PVI

$$p'(t)=r\,p(t), \qquad p(t_0)=p_0, \quad r>0,$$

$$p(t+h) - p(t) = r(t,p)p(t)h, \quad h \to 0, \quad \Rightarrow \quad p'(t) = r(t,p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si $r(t,p) = r$, constante. Así, la población puede ser modelizada mediante el PVI

$$p'(t) = r\,p(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r > 0,$$

cuya solución es

$$\boxed{p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}}$$

El modelo anterior se conoce como **modelo de Malthus o modelo malthusiano** en honor al economista inglés T.R. Malthus.

$$p(t+h)-p(t)=r(t,p)p(t)h, \quad h\to 0, \quad \Rightarrow \quad p'(t)=r(t,p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si $r(t,p)=r$, constante. Así, la población puede ser modelizada mediante el PVI

$$p'(t)=r\,p(t), \qquad p(t_0)=p_0, \quad r>0,$$

cuya solución es

$$\boxed{p(t)=p_0 e^{r(t-t_0)}}$$

El modelo anterior se conoce como **modelo de Malthus o modelo malthusiano** en honor al economista inglés T.R. Malthus.

Nótese que si $r<0$ la especie esta condenada a la extinción y si $r>0$ ésta crece en proporción geométrica.

¿Es realista este modelo?

¿Es realista este modelo?
Según estimaciones del **US Census Bureau**
http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpopinfo.html
la población total de la Tierra en 1980 era de $4{,}453 \times 10^9$ personas.

Hasta 1980, el índice de crecimiento medio fue de un 1.84 % anual, o sea $r = 0{,}0184$. Entonces la evolución de la población mundial es

$$p(t) = 4{,}453 \times 10^9 e^{0{,}0184(t-1980)}.$$

¿Es realista este modelo?

Según estimaciones del **US Census Bureau**
http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpopinfo.html
la población total de la Tierra en 1980 era de $4{,}453 \times 10^9$ personas.

Hasta 1980, el índice de crecimiento medio fue de un 1.84 % anual, o sea $r = 0{,}0184$. Entonces la evolución de la población mundial es

$$p(t) = 4{,}453 \times 10^9 e^{0{,}0184(t-1980)}.$$

Por ejemplo, la ecuación nos predice para el año 1995 la cantidad $5{,}87 \times 10^9$ que se acerca bastante a la estimada de $5,696 \times 10^9$, y para el año 2005 de $7{,}05 \times 10^9$ (la cifra estimada fue $6,48 \times 10^9$).

La fórmula anterior nos dice que la población se duplica cada

$$2N = Ne^{0{,}0184\,T}, \qquad T = 100 \log 2/1{,}84 \approx 37.5 \text{ años}.$$

- $p(2008) = 7{,}45 \times 10^9$ y "**real**": $6{,}71 \times 10^9$. La superficie de la tierra es $\approx 5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$ pero el $71\,\%$ es agua $\Rightarrow$

Crecimiento de poblaciones: Malthus

- $p(2008) = 7{,}45 \times 10^9$ y "**real**": $6{,}71 \times 10^9$. La superficie de la tierra es $\approx 5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$ pero el 71 % es agua $\Rightarrow$

1 ☺$\times$**22805**m^2

- $p(2008) = 7{,}45 \times 10^9$ y "**real**": $6{,}71 \times 10^9$. La superficie de la tierra es $\approx 5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$ pero el 71 % es agua $\Rightarrow$

1 ☺$\times$**22805**m^2

¿Es realista este modelo? Veamos que pasa en el 2463

- $p(2008) = 7{,}45 \times 10^9$ y "**real**": $6{,}71 \times 10^9$. La superficie de la tierra es $\approx 5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$ pero el 71 % es agua $\Rrightarrow$

1 ☺$\times$**22805**m^2

¿Es realista este modelo? Veamos que pasa en el 2463

- $p(2463) = 5{,}15 \cdot 10^{12} \Rrightarrow$ la densidad de población es de 0,0336 habitantes$/m^2$

- $p(2008) = 7{,}45 \times 10^9$ y "**real**": $6{,}71 \times 10^9$. La superficie de la tierra es $\approx 5{,}1 \cdot 10^{14} m^2$ pero el 71 % es agua $\Rrightarrow$

1 ☺$\times$**22805**m^2

¿Es realista este modelo? Veamos que pasa en el 2463

- $p(2463) = 5{,}15 \cdot 10^{12} \Rrightarrow$ la densidad de población es de 0,0336 habitantes$/m^2$

$\Rrightarrow$ 1 ☹$\times 30m^2$

Crecimiento de poblaciones: Nosotros ya nos estamos preparando

Vivienda insiste con los mini pisos de 30 m²

- Según el Plan Estatal de Vivienda 2009-2012.
- Las VPO estarán entre los 30m² y los 120m², según sus ocupantes.
- Incluso si los solicitantes son familia numerosa.
- **ENCUESTA:** ¿Crees que 30 metros son suficientes?

Minuteca todo sobre: Vivienda

AGENCIAS. 27.10.2008 - 11:13h

El Gobierno propone, en el nuevo Plan estatal de vivienda, que las viviendas de protección oficial (VPO) para venta o alquiler tengan **una superficie mínima de 30 metros cuadrados** para dos personas, que se debe ampliar en quince metros por cada miembro más de un hogar.

El máximo tamaño será de 120 m², sin importar si es familia numerosa

Así consta en el borrador del Plan Estatal de Vivienda 2009-2012, y que este lunes presentará el Gobierno a las comunidades autónomas y a agentes económicos y sociales.

Aunque son las comunidades autónomas las que deciden las superficies, el borrador señala que, en caso de que no lo hagan, **la mínima debería ser de 30 metros cuadrados** para una vivienda de dos personas.

En cuanto a la superficie máxima, el texto recomienda que se limite a 90 metros cuadrados, y no prevé que sea mayor para supuestos como el de familia numerosa, que en el caso del plan vigente (2005-2008) amplía el tamaño posible de la

tama Siguiente Anterior Resaltar todo Coincidencia de mayúsculas/minúsculas

Informativos Telecinco > Economía

El Gobierno estudia ofrecer viviendas protegidas de 25 metros cuadrados

Ideas para organizar una vivienda pequeña

AGENCIAS
11 de abril de 2005

Viviendas de 25 ó 30 metros cuadrados y cuatro metros de alto con espacios comunes. Este es el proyecto que el Ejecutivo se está planteando para solucionar el problema de la vivienda en España.

El Gobierno está estudiando una modificación de la legislación sobre la Vivienda de Protección Oficial (VPO) para que las casas puedan ser más pequeñas.

La ministra de Vivienda, María Antonia Trujillo, ha calificado la actual normativa de VPO de "encorsetada" y ha añadido que el objetivo es modificar la legislación para que se puedan construir viviendas de protección oficial más pequeñas "adecuadas a cada ciclo vital de las personas".

La ministra ha eludido pronunciarse sobre el tamaño mínimo definitivo de las viviendas protegidas, si bien ha dicho que "hay que seguir el modelo de los países nórdicos" y ha apuntado que "una persona joven puede necesitar sólo un apartamento de 30 metros cuadrados".

Veamos que pasa en el 2535.

- $p(2535) = 1{,}47 \cdot 10^{13}$, la densidad de población es de 1 habitante/$0{,}1m^2$ $\Rrightarrow$ 1 ☹$\times 10m^2$

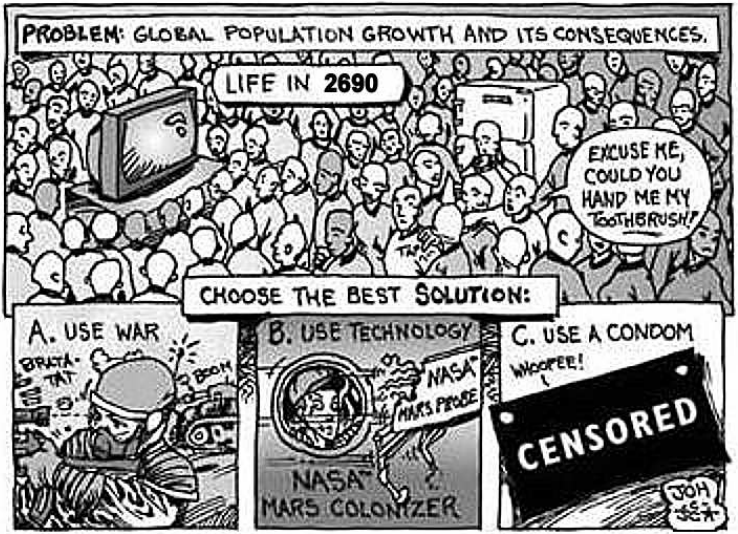
Crecimiento de poblaciones: Malthus

Veamos que pasa en el 2535.

- $p(2535) = 1{,}47 \cdot 10^{13}$, la densidad de población es de 1 habitante$/0{,}1m^2 \Rrightarrow 1$ ☹$\times 10m^2$

¿Qué ocurrirá en el 2690?

¿Qué ocurrirá en el 2690?

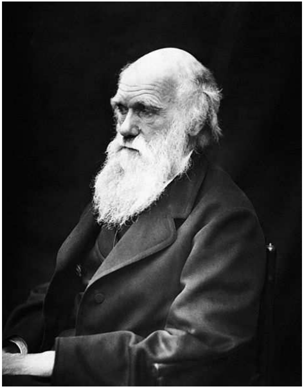


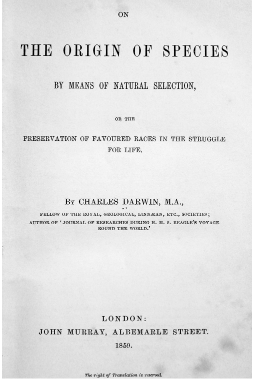
Malthus en su ensayo, abusando de su ecuación, predijo un colapso socioeconómico pues proclamó que la **capacidad procreadora** de los humanos es tan grande que siempre nacen más niños que los que pueden sobrevivir, lo cual se agrava por el hecho de que la cantidad de alimentos no crece exponencialmente (Malthus creía que era un crecimiento aritmético).

Así Malthus concluyó que un gran número de humanos está predestinado a sucumbir en la lucha por la existencia.

Crecimiento de poblaciones: Malthus

Aunque hoy día no se consideran ciertas las teorías malthusianas, en su momento tuvieron gran influencia. De hecho fue la lectura del ensayo de Malthus lo que indujo a Darwin el mecanismo de **selección natural** universalmente aceptado hoy día.




ON

THE ORIGIN OF SPECIES

BY MEANS OF NATURAL SELECTION,

OR THE

PRESERVATION OF FAVOURED RACES IN THE STRUGGLE FOR LIFE.

By CHARLES DARWIN, M.A.,

FELLOW OF THE ROYAL, GEOLOGICAL, LINNÆAN, ETC., SOCIETIES;
AUTHOR OF 'JOURNAL OF RESEARCHES DURING H. M. S. BEAGLE'S VOYAGE ROUND THE WORLD.'

LONDON:
JOHN MURRAY, ALBEMARLE STREET.
1859.

The right of Translation is reserved.

Aunque hemos visto que el modelo funciona razonablemente bien para poblaciones grandes, hay que hacer varias correcciones pues si $p(t)$ empieza a crecer demasiado habrá muchos otros factores como la falta de espacio o de alimentos que frenará el crecimiento. Por tanto varios años después en 1837 un matemático y biólogo belga, P. F. Verhulst, propuso un modelo algo más realista conocido como el **modelo logístico**.

Aunque hemos visto que el modelo funciona razonablemente bien para poblaciones grandes, hay que hacer varias correcciones pues si $p(t)$ empieza a crecer demasiado habrá muchos otros factores como la falta de espacio o de alimentos que frenará el crecimiento. Por tanto varios años después en 1837 un matemático y biólogo belga, P. F. Verhulst, propuso un modelo algo más realista conocido como el **modelo logístico**.

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t)$$

$$p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0$$

Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0.$$

- $\mathbf{c} \ll \mathbf{r}$ ya que si r no es muy grande la aproximación de malthusiana es bastante buena.

Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0.$$

- $\mathbf{c} \ll \mathbf{r}$ ya que si r no es muy grande la aproximación de malthusiana es bastante buena.

- Si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-\mathbf{cp^2}$ no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial.

Crecimiento de poblaciones: M. logístico

Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0.$$

- $\mathbf{c} \ll \mathbf{r}$ ya que si r no es muy grande la aproximación de malthusiana es bastante buena.
- Si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-\mathbf{cp^2}$ no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial.
- Usualmente $\mathbf{c} = \mathbf{r}/\mathbf{K}$ donde K es la capacidad de carga que está ligada a los recursos del hábitat.

Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0.$$

- $\mathbf{c} \ll \mathbf{r}$ ya que si r no es muy grande la aproximación de malthusiana es bastante buena.

- Si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-\mathbf{cp^2}$ no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial.

- Usualmente $\mathbf{c} = \mathbf{r}/\mathbf{K}$ donde K es la capacidad de carga que está ligada a los recursos del hábitat.

Resolvamos la EDO $p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t)$ pues es una ecuación separable

$$y' = y(a+by),\ y(x_0) = y_0,\ ab \neq 0.$$

Tenemos

$$\frac{dp}{p(r-cp)} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p(r-cp)} = \frac{1}{r}\log\left|\frac{p}{r-cp}\right| = t+C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p}{r-cp} = Ce^{rt} \qquad \text{pero } p(t_0) = p_0 \text{ así que}$$

$$\frac{p}{r-cp} = \frac{p_0}{r-cp_0}e^{r(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{rp_0 e^{r(t-t_0)}}{r - cp_0 + cp_0 e^{r(t-t_0)}}.$$

Nótese que si $t \to \infty$, $p(t) \to r/c$ independientemente de la condición inicial p_0.

Así

$$p(t) = \frac{rp_0 e^{r(t-t_0)}}{r - cp_0 + cp_0 e^{r(t-t_0)}} = \frac{rp_0}{cp_0 + (r - cp_0)e^{-r(t-t_0)}}.$$

En el caso cuando $0 < p_0 < r/c$ la evolución de la población está representada en la gráfica siguiente:

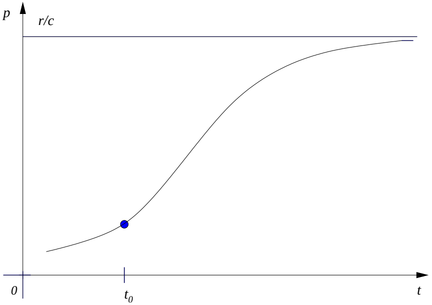


Figura: Evolución de la población según el modelo logístico.

Este modelo se ha comprobado con varias especies y ha dado muy buenos resultados, en particular, el hecho de que la población se estabilice ha sido comprobado en distintos experimentos con paramecios obteniéndose una gran concordancia entre los resultados teóricos y experimentales.

Este modelo se ha comprobado con varias especies y ha dado muy buenos resultados, en particular, el hecho de que la población se estabilice ha sido comprobado en distintos experimentos con paramecios obteniéndose una gran concordancia entre los resultados teóricos y experimentales.

Vamos a aplicar el modelo logístico a la población mundial. Usando los datos de 1980-2008 tenemos que $r = 0{,}0146$ y $c = 4{,}15610^{-13}$. Entonces el modelo logístico predice que la población mundial se estabilizará en torno a la cantidad $p_\infty = r/c = 3{,}5110^{10}$, lo cual ocurrirá, según la ley malthusiana en el 2097.

Obviamente este modelo sigue siendo muy simple ya que no tiene en cuenta ni las guerras (habituales desde hace cientos de años) ni las epidemias.

Ejercicio

En España, si usamos los datos de los censos de 1940 a 1990 nos da que $r = 0{,}008$. *Si tomamos* $p(1940) = 2{,}62\,10^7$ *encontrar el número de habitantes en el 1998 y compararlo con el número censado* $p = 3{,}98\,10^7$ *personas. Repetir el cálculo para 2005 y comparar con el número censado* $4{,}0341\,10^7$

Ejercicio

En España, si usamos los datos de los censos de 1940 a 1990 nos da que $r = 0{,}008$. *Si tomamos* $p(1940) = 2{,}62\,10^7$ *encontrar el número de habitantes en el 1998 y compararlo con el número censado* $p = 3{,}98\,10^7$ *personas. Repetir el cálculo para 2005 y comparar con el número censado* $4{,}0341\,10^7$

¿Cual será la población en España en el 2500 si sigue la misma tendencia? Hacer una predicción del número de habitantes que han de estabilizarse en España. (suponer que la razón real representa el mismo porcentaje que en el caso de la población mundial).

Vamos ahora a considerar el modelo de Lotka-Volterra para el crecimiento de dos poblaciones siendo una la depredadora de la otra.

Vamos ahora a considerar el modelo de Lotka-Volterra para el crecimiento de dos poblaciones siendo una la depredadora de la otra.

Modelos de Lotka-Volterra

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.

Modelos de Lotka-Volterra

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.
- Si no hay presas $(c = 0)$ la población del depredador disminuye exponencialmente.

Sea N la población de la presa y P la del depredador:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP,$$
$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP,$$

donde a, b, c, d son números positivos.

- La población de las presas, si no hay depredador $(b = 0)$, crece exponencialmente.
- El depredador corrige esta tendencia con el término $-bPN$.
- Si no hay presas $(c = 0)$ la población del depredador disminuye exponencialmente.
- Las presas corrigen esta tendencia con el término $+cPN$.