Ampliación de Análisis Matemático

Diplomatura en Estadística. Curso 2009/2010

http://euler.us.es/~renato/

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

Soluciones de EDOs en serie de potencias

$p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son funciones buenas en un entorno de x_0

Buscamos la solución como una *serie de potencias*,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: resolver la EDO $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

Buscamos la solución $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, la sustituimos en la EDO y usamos que

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

lo que nos da

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0,$$

Ejemplo: resolver la EDO $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0,$$

equivale a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n+2)a_n\right] x^n = 0.$$

$(x^n)_n$ es una sucesión de funciones $\Rightarrow$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n+2)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n, \qquad n \geq 0.$$

Solución: $a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n$

Si sabemos a_0, la recurrencia anterior permite calcular los valores $a_2, a_4, \ldots a_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ y si conocemos a_1 entonces podemos calcular $a_3, a_5, \ldots a_{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{2}{2n}\, a_{2n-2} = \left(\frac{2}{2n}\right)\left(\frac{2}{2n-2}\right) a_{2n-4} = \cdots \\
&= \frac{2^n}{(2n)(2n-2)\cdots 2} a_0 = \frac{a_0}{n!}, \\
a_{2n+1} &= \frac{2}{2n+1}\, a_{2n-1} = \left(\frac{2}{2n+1}\right)\left(\frac{2}{2n-1}\right) a_{2n-3} = \cdots = \\
&= \frac{2^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}\, a_1,
\end{aligned}
$$

es decir $2^n/(2n+1)!!\, a_1$, donde $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)$.

De esta forma obtenemos dos soluciones linealmente independientes (una tiene solo potencias pares y la otra solo impares)

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Obviamente la primera suma es fácilmente reconocible como la serie de potencias de la función e^{x^2}, no así la segunda que en general no se expresa como combinación de funciones elementales.

De esta forma obtenemos dos soluciones linealmente independientes (una tiene solo potencias pares y la otra solo impares)

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Obviamente la primera suma es fácilmente reconocible como la serie de potencias de la función e^{x^2}, no así la segunda que en general no se expresa como combinación de funciones elementales.

¿Qué nos dice Maxima?