Ampliación de Análisis Matemático

Diplomatura en Estadística

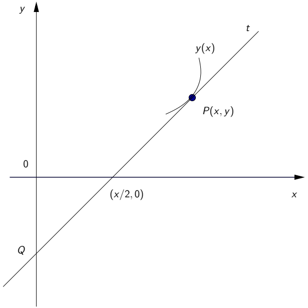
http://euler.us.es/~renato/

R. Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla
Curso 2009/2010

Aplicaciones EDOs de 1º orden

Ejemplo

Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que el segmento de la tangente t a la curva y en un punto cualquiera $P(x,y)$ dibujado entre P y el eje $0y$ quede bisecado por el eje Ox.



$$y' = 2y/x$$

Ejemplo

Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que la pendiente de la tangente t a la curva y en cada punto sea la suma de las coordenadas del punto. Encuentra además la curva que pasa por el origen.

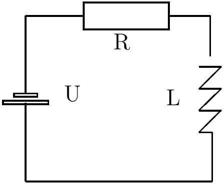
$$y' = y + x$$

Ejemplo

Se sabe que la intensidad i de circuito está gobernada por la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U,$$

donde L es la impedancia, R la resistencia y U el voltaje. Supongamos que el voltaje U es constante y que $i(0) = i_0$. Encontrar la dependencia de i respecto al tiempo t. Realizar el mismo estudio si $U = U_0 \mathrm{sen}(\omega t)$.



Circuito eléctrico

Ejemplo

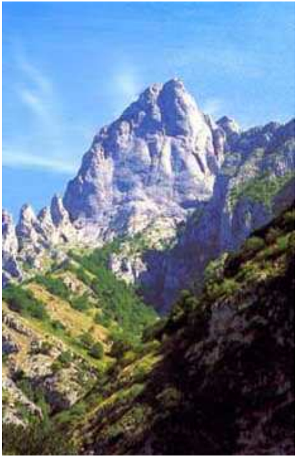
La ecuación barométrica de Pascal es la EDO

$$p'(h) = -\lambda p(h), \qquad \lambda > 0,$$

donde p es la presión en función de la altura h. Si $h = 0$, la presión es la presión al nivel del mar. ¿Cómo varía la presión con la altura?

Datos experimentales dan el siguiente valor de $\lambda = 1.27 \times 10^{-6}\text{cm}^{-1}$.
La solución: $p(h) = p_0 e^{-\lambda h}$

Grazalema (Cádiz) , 1654m, 0.81atm



Picos de Europa (Cantabria), 2648m , 0.71atm

Sierra Nevada (Granada), 3478m, 0.64atm

Teide (Tenerife), 3710m , 0.62atm

Everest (Himalaya), 8848m, 0.32atm

La descomposición radioactiva

$$N(t+h)-N(t) = -\lambda N(t)h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{N(t+h)-N(t)}{h} = -\lambda N(t).$$

$$N'(t) = -\lambda N(t), \qquad N(t_0) = N_0.$$

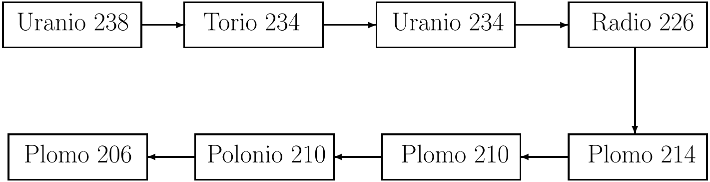
El *período de semi-desintegración*: el tiempo necesario para disminuir en la mitad el número de átomos,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\log 2}{T} = \frac{0.693147}{T}.$$

Elemento	Período T	λ
Radio 226 $\to$ Plomo 214	1600 años	0.000433217 1/años
Plomo 214 $\to$ Plomo 210	47 min	0.0147478 1/min
Plomo 210 $\to$ Polonio 210	22 años	0.0315067 1/años
Polonio 210 $\to$ Plomo 206	138 dias	.00502281 1/dias
Carbono 14 $\to$ Nitrogeno 14	5568 años	0.000124488 1/años
Uranio 238 $\to$ Torio 234	4.5110^9 años	1.5101210^{-10} 1/años

Aplicaciones EDOs de 1º orden

En muchos casos un elemento radioactivo puede obtenerse de a partir de otros en lo que se denomina una cadena radioactiva.



Cadena radioactiva

Si llamamos a esa aportación $r(t)$, entonces la ecuación que gobierna la desintegración del Plomo 210 es la siguiente

$$N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \qquad N(t_0) = N_0,$$

Falsificación de obras de arte

Supongamos entonces que queremos saber si un cuadro es del siglo XVIII o una falsificación del XX, además $r(t) \approx r_0$

$$N(t) = \frac{r_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Obviamente hoy día podemos medir fácilmente los valores de r_0 (que hemos supuesto no ha cambiado apenas en estos 300 años) y $N(t)$, no así el valor N_0 pues no sabemos la cantidad inicial de Plomo 210 que había en la muestra de pintura.

No obstante nuestra ecuación si nos permite distinguir entre una obra del siglo XVIII y una falsificación reciente. Asumamos que la diferencia de antigüedad es de unos 300 años. De la expresión anterior tenemos

$$\lambda N_0 = N(t)e^{\lambda 300} - r_0(e^{\lambda 300} - 1).$$

Existe un rango muy alto para la cantidad de Radio 226 en una muestra de mineral de Plomo en función de las minas que va desde 0.18 desintegraciones por minuto y gramo de mineral hasta 140 desintegraciones por minuto y gramo.

Como el Plomo 210 esta en equilibrio con el Radio 226 ello nos indica que en función de la procedencia del pigmento usado (la cual ciertamente no la conocemos con exactitud) N_0 puede variar sensiblemente. ¿Cómo proceder?

Es fácil entender que si la pintura es realmente antigua, entonces la cantidad de radioactividad procedente del Plomo 210 y del Radio 226 será prácticamente la misma, mientras que si el una falsificación moderna, entonces la aportación del Plomo 210 será mucho mayor.

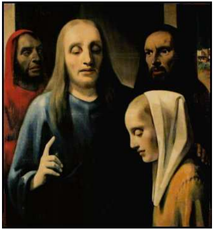
Como no podemos deducir el valor inicial N_0 intentemos dar una cota del mismo lo suficientemente alta para estar seguros que tenemos una falsificación.

Por ejemplo, si se supone que el Plomo 210 tenía un ritmo de decaimiento de 100 desintegraciones por minuto y gramo en la muestra original entonces en la muestra había una concentración del 0.014% de Uranio 238 (de la cual se sigue la del Radio 226) la cual es extremadamente alta pues la normal es de unos $2.7\,10^{-4}\%$.

Ahora bien, como existen algunas minas con una concentración de un 2%-3%, así que para mayor seguridad en vez de 100 pongamos 30000 desintegraciones por minuto y gramo. esa cota para λN_0 será demasiado alta y podremos asegurar la falsedad de la obra.

Las falsificaciones de H.A. Van Meegeren.

Veamos un ejemplo muy famoso. La falsificación de la obra "Los discípulos de Emmaus" del pintor holandés del siglo XVII Jan Vermeer realizada por un pintor "mediocre", el también holandés H.A. Van Meegeren. Van Meegeren fué acusado de colaborar con los nazis en la II Guerra Mundial por la venta a Goering de varias obras de Vermer.



Estando en prisión Van Meegeren declaró que esa obra, "Los discípulos de Emmaus" y otras dos más eran falsificaciones propias. Para probarlo Van Meegeren comezó a pintar en prisión otra obra de Vermeer "Jesús entre los Doctores".

Durante el proceso se enteró que habían cambiado su pena de traición por la de falsificación y se negó a terminarla dejando a los expertos con la duda sobre la falsedad de la famosa pintura.

Finalmente, Van Meegeren fué condenado a un año de prisión por falisificación el 12 de octubre de 1947 y el 30 de diciembre de 1947 murió de paro cardíaco.

"Los discípulos de Emmaus"

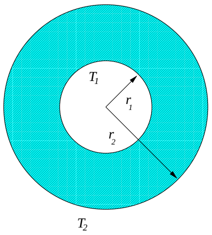
El escándalo que provocó las declaraciones fue mayúsculo por lo que se buscó una comisión de expertos que dictaminara la falsedad o no de esta obra. Después de muchas discusiones los expertos en arte decidieron que la obra no era una falsificación y "Los discípulos" fue comprada por la Sociedad Rembrant por 170000 USA$.

Unas mediciones cuidadosas de la cantidad de desintegraciones por minuto y gramo del Radio 226 y del Plomo 210 en una muestra de "Los discípulos" dió que $r_0 = 0.8$ y $N(t) = 8.5$, luego usando la fórmula anterior tenemos

$$\lambda N_0 = 8.5 e^{300/22 \log 2} - 0.8(e^{300/22 \log 2} - 1) = 98050,$$

que superaba con creces la cota (30000) impuesta.
O sea, era realmente ¡FALSA!
Como ejercicio colofón decide si las obras "Mujeres leyendo música" ($r_0 = 0.3$, $N = 10.3$) y "Mujeres tocando la mandolina" ($r_0 = 0.17$, $N = 8.17$) de Van Vermeer son falsificaciones modernas o no.

Aplicaciones de la EDO separable



Ejemplo

Sea una esfera hueca homogénea de radio interior r_1 y radio exterior r_2. Supongamos que la temperatura de la cara interior es T_1 y la exterior es T_2. Encontrar la temperatura en la esfera en función del radio.

Para resolver el problema usaremos la siguiente ecuación diferencial

$$Q = -\varkappa r^2 \frac{dT}{dr}, \qquad \varkappa > 0,$$

donde Q es la cantidad de calor que pasa entre la esfera "interior" (en blanco) y la exterior (sombreada) y que se asume constante.

$$-\frac{dr}{r^2} = \frac{\varkappa}{Q}\, dT \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{r} + C = \frac{\varkappa}{Q}\, T(r),$$

pero $T(r_1) = T_1$, luego $C = \frac{\varkappa}{Q} T_1 - r_1$, de donde deducimos

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{\varkappa}{Q} \left(T(r) - T_1 \right).$$

Ahora bien, como ha de ser $T(r_2) = T_2$, podemos eliminar Q en la ecuación (el cual en general no es conocido) para obtener $Q = \frac{\varkappa(T_2 - T_1) r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Ejemplo

Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \to C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b. Se sabe que la velocidad la velocidad de formación de C es proporcional a la concentración de A y B. Lo anterior nos conduce a la EDO

$$x' = \varkappa(a - x)(b - x), \qquad x(0) = 0.$$

Supongamos que $a \neq b$, entonces tenemos

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \varkappa dt \quad \Rrightarrow \quad \log\frac{a-x}{b-x} = (a-b)\varkappa t + C,$$

es decir, $\dfrac{a-x}{b-x} = Ce^{(a-b)\varkappa t}$, como $x(0) = 0$, $C = a/b$, luego

$$x(t) = ab\frac{1 - e^{(a-b)\varkappa t}}{b - ae^{(a-b)\varkappa t}}.$$

$$x(t) = ab\frac{1 - e^{(a-b)\varkappa t}}{b - ae^{(a-b)\varkappa t}}.$$

Si suponemos que $b > a$ podemos ver que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = a$$

y si $b < a$ es fácil probar que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = b,$$

lo cual es "evidente" pues la reacción acabará cuando la concentración de A o B acabe.

Ejemplo

La velocidad de escape de la Tierra

Nos interesa resolver el problema de encontrar la velocidad de escape al espacio exterior de un cuerpo que se encuentre en la superficie de la tierra. Si usamos la ley de Newton tenemos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM_T}{r^2},$$

donde G es la constante universal gravitatoria y M_T es la masa de la tierra. Como $g = GM_T/R^2$, siendo R el radio de la tierra (que supondremos una esfera), tenemos $GM_T = gR^2$. Obviamente r varia con el tiempo por lo que la ecuación anterior se torna algo complicada a simple vista. No obstante, usando la regla de la cadena tenemos $dv/dt = (dr/dt)(dv/dr) = v\,dv/dr$, luego

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

La solución de esta EDO usando el método de separación de variables es $v^2 = 2gR^2/R + C$. Supongamos que v_0 es la velocidad inicial del cuerpo sobre la superficie terrestre, o sea, $v(R) = v_0$, entonces $C = v_0^2 - 2gR$, de donde deducimos la velocidad del cuerpo a cualquier distancia de la tierra

$$v^2 = \frac{2gR}{r} + v_0^2 - 2gR.$$

Si queremos enviar una nave y que ésta escape de la gravedad terrestre necesitamos que la ecuación anterior nos de siempre un valor positivo de v^2. Obviamente ello ocurrirá si y sólo si $v_0^2 - 2gR \geq 0$, o sea $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. Es más, para que escape definitivamente de la tierra formalmente es suficiente que $v \geq 0$ cuando $r \to \infty$, lo cual nos conduce a la misma expresión para la velocidad de escape. Poniendo los datos $R = 6400000$ metros $g = 9.8m/s^2$ obtenemos $v_0 = 11200m/s = 11.2Km/s$.

Ejemplo

La caída de un cuerpo en un medio viscoso se puede modelizar mediante la ecuación para la velocidad $v(t)$

$$v' = g - \kappa v^r, \qquad v(0) = v_0,$$

donde g *y* κ *son ciertas constantes (la gravedad y la viscosidad).*

Resolvamos la ecuación

$$\frac{dv}{g - \kappa v^r} = dt \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - \kappa v^r} = \frac{1}{g} \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 - \omega^2 v^r}, \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{g}.$$

Escojamos $r = 2$, por ejemplo. Entonces

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1-\omega^2 v^r} = \frac{1}{2\omega} \log \frac{(1+\omega v)}{(1-\omega v)} \frac{(1-\omega v_0)}{(1+\omega v_0)} = g(t-t_0).$$

Despejando v tenemos la solución

$$v(t) = \frac{1}{\omega} \frac{\left(\frac{1+\omega v_0}{1-\omega v_0}\right) e^{2g\omega(t-t_0)} - 1}{\left(\frac{1+\omega v_0}{1-\omega v_0}\right) e^{2g\omega(t-t_0)} + 1}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{g}} > 0.$$

Como $\omega > 0$, entonces si $t \to \infty$ el cuerpo sólo podrá alcanzar la velocidad límite $v_{max} = 1/\omega$ independiente del valor v_0 inicial.

Ejercicio

Resolver el caso $r = 3$.