Apellidos, Nombre: ____ **GRUPO B**

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: DIPLOMATURA EN ESTADÍSTICA (PARCIAL ABRIL 2004)

Problema 1 (2 ptos.) *Decida si son* **Verdaderas** *o* **Falsas** *las siguientes afirmaciones* **razonando su respuesta** *(***sólo tendrán valor** *las respuestas concisas).*

1. La función $y(x) = x^2 + e^{2x} + 3$ es solución de la ecuación diferencial $-xy' + 3y = x^2 + 9$ $\boxed{}$

2. La EDO $(3x^2 + y^2x)y' - (6x + y^2) = 0$ es exacta $\boxed{}$

Problema 2 (4 ptos.) *De las siguientes tres EDOs de primer orden, escoge dos y resuélvelas (marcar en la hoja de teoría al final de la pregunta 2):*

- ☐ $(x + y - 1)y' + (x - y) = 0$
- ☐ $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$
- ☐ $(x \log y - x^2 + \cos y)y' + (x^3 + y \log y - y - 2xy) = 0$

Problema 3 (4 ptos.) *Sea el siguiente sistema de EDOs* $\quad Y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y.$

(a) Encuentra la solución general del sistema anterior

(b) Calcula una matriz fundamental del sistema anterior (use si es necesario la solución del apartado anterior) y deduce el valor de e^{xA}

(c) Resuelve, usando lo anterior si es necesario, el siguiente problema de valores iniciales

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Apellidos, Nombre: ____ **GRUPO B**

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: DIPLOMATURA EN ESTADÍSTICA 17/6/2004

IMPORTANTE: Entregar las soluciones de la parte de teoría del exámen en los mismos folio del examen
DURACIÓN TOTAL: 3 horas

TEORÍA

Pregunta 1. (1.5 Puntos) Demuestre uno de los dos siguientes teoremas:

1. Sea el PVI $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, $y(x_0) = y_0$. Si $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contenga al punto $x_0 \in I$, entonces cualquiera sea el valor y_0, existe una única solución del problema del PVI anterior.

2. Sea $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo $Y' = A(x)Y$ es un espacio vectorial de dimensión n.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u>

Pregunta 2. (1.5 Puntos) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo. (Sólo tendrán valor las respuestas concisas)

1. ☐ La función $y(x)$ definida por $ye^y + ye^x = 3$ es una solución de la EDO $(e^y + e^x)y' + e^x y = 0$

2. ☐ Para que el sistema de EDOs $Y' = AY$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tenga solución es necesario y suficiente que $\det A \neq 0$

3. ☐ Los polinomios de Hermite son ortogonales en $(0, \infty)$ respecto a la función peso $\rho(x) = e^{x^2}$.

4. ☐ El punto $x = 0$ es un punto singular regular para la EDO $y'' + xy' + \sqrt{x+1}\,y = 0$

Elección de los 2 apartados del Problema 1: A ☐ B ☐ C ☐

GRUPO B

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: DIPLOMATURA EN ESTADÍSTICA 17/6/2004

PROBLEMAS

Problema 1 (2.5 ptos.) *De las siguientes tres EDOs de primer orden, escoge dos y resuélvelas (marcar en la hoja de teoría al final de la pregunta 2):*

A. $y' - y = 2x^2y^3$

B. $(2x + y)y + (2y + x)y' = 0$

C. $y' - 4y + 2y^2 = 5$

Problema 2 (2.25 ptos.) *Sea el siguiente sistema de EDOs* $Y' = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} Y.$

(a) Encuentra la solución general del sistema anterior

(b) Calcula una matriz fundamental del sistema anterior (use si es necesario la solución del apartado anterior) y deduce el valor de e^{xA}

(c) Resuelve, usando lo anterior si es necesario, el siguiente problema de valores iniciales

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2.25 ptos.) *Sea la siguiente EDO de orden dos* $y'' + 2y' + 4y = x^2e^{-x}$.

1. *Encuentra su solución general.*
2. *Usando lo anterior resuelve, si es posible, el problema de valores iniciales* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Apellidos, Nombre: ______________________________ **GRUPO B**

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: DIPLOMATURA EN ESTADÍSTICA 8/9/2004

IMPORTANTE: Entregar las soluciones de la parte de teoría del exámen en los mismos folio del examen
DURACIÓN TOTAL: 2 horas y 45 min.

TEORÍA

Pregunta 1. (1.5 Puntos) Demuestre uno de los dos siguientes teoremas:

1. Para que la EDO $N(x,y)y' + M(x,y) = 0$ sea exacta es necesario y suficiente que se cumpla la condición $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ en cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2. Dadas n soluciones $y_1, \dots, y_n$ de la EDO $y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = 0$, éstas son linealmente independientes si y sólo si el wronskiano $W[y_1, \dots, y_n](x)$ es distinto de cero para algún $x \in \mathbb{R}$.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u>

Pregunta 2. (1.5 Puntos) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo. (Sólo tendrán valor las respuestas concisas)

1. Una solución de la EDO $y' + 2xy + y^2 = 0$ es la función $y(x) = x^2 + 3x + 1$

2. La solución general de $y'' + 2y' + y = x + 2$ es de la forma $y = c_1e^x + c_2xe^x$

3. La EDO $yy' + x^2y = 2$ es lineal

4. El punto $x = 1$ es un punto singular para la EDO $x(1-x)y''+(x^2-1)y'+(x^3-1)\,y = 0$

Elección de los 2 apartados del Problema 1: A ☐ B ☐ C ☐

GRUPO B

AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: DIPLOMATURA EN ESTADÍSTICA 8/9/2004

PROBLEMAS

Problema 1 (2.5 ptos.) *De las siguientes tres EDOs de primer orden, escoge dos y resuélvelas (marcar en la hoja de teoría al final de la pregunta 2):*

A. $(2y + x + 2)y' + y = 0$

B. $xy' - (2x + 1)y + y^3 = 0$

C. $y' + (2x + 5y)^4 = 0$

Problema 2 (2.25 ptos.) *Sea el siguiente sistema de EDOs* $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y.$

(a) Encuentra la solución general del sistema anterior

(b) Calcula una matriz fundamental del sistema anterior (use si es necesario la solución del apartado anterior) y deduce el valor de e^{xA}

(c) Resuelve, usando lo anterior si es necesario, el siguiente problema de valores iniciales

$$Y' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2.25 ptos.) *Sea la siguiente EDO de orden dos* $y'' + xy = 0$ *conocida como EDO de Airy.*

1. *Decide si* $x = 0$ *es un punto regular*
2. *¿Qué forma han de tener las soluciones de la EDO anterior en un entorno del cero?*
3. *Encuentra su solución general.*