Apellidos, Nombre: ____

Métodos Matemáticos: Análisis Funcional. Parcial I. 3/12/2008

Pregunta 1. (3 Puntos) Demuestra uno de los siguientes teoremas:

[ ] Primer Teorema de Abel para las series de potencias

[ ] De las esferas encajadas

PROBLEMAS

Problema 4 (3 ptos.) Sea $\mathbb{X}$ el espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ reales con valores entre -1 y 1, $(\forall n,\ x_n \in [-1,1])$ y sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

1. Sea la función ρ definida por $\rho(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|x_n - y_n|}}{a^n}$. Decide si el espacio $(\mathbb{X}, \rho)$ es un espacio métrico.
2. En caso de serlo, decide si es separable. Justifica la respuesta.

¿Qué pasa en el caso $a \in (0,1]$?

Problema 5 (4 ptos.) *Sea la sucesión de funciones* $f_n(x) = n^{\alpha} x^2 e^{-2nx}$, $\alpha > 0$. *Estudia, en función del parámetro* α*,*

1. *la convergencia puntual de dicha sucesión en el intervalo* $[0,1]$ *y encuentra su función límite,*
2. *la convergencia uniforme de dicha sucesión en el intervalo* $[0,1]$*,*
3. *¿cuándo se tiene que* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx$*?*

¿Qué ocurre si en vez de usar el intervalo $[0,1]$ *escogemos* $[0,\infty)$*?*

<u>DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA:</u>